

I. megoldás. Rendezzük át (1) bal oldalát a második tényezőben fellépő a , b ill. c tag szorzóit foglalva össze, ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

$$(2) \quad a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc.$$

Adjunk a bal oldal első tagjához $2abc$ -t, a második és harmadik tagból és a jobb oldalból vonjunk le ugyanennyit:

$$a[(b+c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a-b)^2 - c^2] \leq abc.$$

A bal oldal így alakítható tovább a második tényezőket szorzattá alakítva, majd kiemeléssel és újabb szorzattá alakítással:

$$\begin{aligned} & a(b+c-a)(b+c+a) + b(c-a+b)(c-a-b) + \\ & \quad + c(a-b-c)(a-b+c) = \\ & = (b+c-a)[a^2 - (b-c)^2] = (b+c-a)(a-b+c)(a+b-c), \end{aligned}$$

tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakban is írható

$$(3) \quad (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt a bal oldal tényezői pozitívak. Felírva két-két tényezőre a mértani és a számtani közép közti egyenlőtlenséget, ezek szorzata (3)-at adja:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)} &\leq a, & \sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)} &\leq c, \\ \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)} &\leq b. \end{aligned}$$

Lévai Ferenc (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (3) – és vele együtt (1) is – akkor is érvényes, ha a , b , c olyan pozitív számok, amelyek nem teljesítik a háromszög-egyenlőtlenséget. A szimmetria miatt elég az $a \geq b \geq c$ esetre szorítkoznunk, ekkor a bal oldal első két tényezője pozitív, a harmadik negatív vagy 0, tehát (3) valóban fennáll.

Domokos László (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

2. Az (1) szimmetrikus volta miatt feltehető, hogy $a \leq b$, $a \leq c$. A jobb és bal oldal különbsége

$$\begin{aligned} & a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) = \\ & = a(a-b)(a-c) + (b-c)(b^2 - ab + ac - c^2) = \\ & = a(b-a)(c-a) + (b-c)^2(b+c-a) \end{aligned}$$

alakra hozható. Erről is látszik, hogy nem negatív, ha a , b , c tetszés szerinti nem negatív számok; 0 is csak az $a = b = c$ esetben lesz.

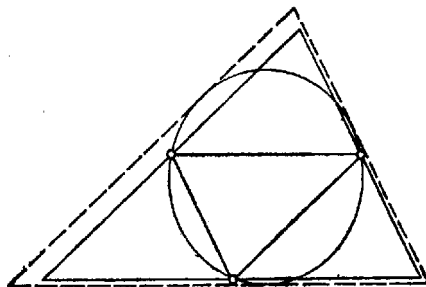
II. megoldás. Az egyenlőtlenség fenti (2) alakját bizonyítjuk. A zárójelek helyére a koszinusz-tétel alapján a megfelelő szorzatot írva, majd pedig a pozitív $2abc$ -vel osztva ezt kell bizonyítanunk:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2.$$

Ezzel a feladatot lényegében visszavezettük az 1964. évi Orsz. Középisk. Matem. Tanulm. Verseny II. fordulójának 1. feladatára, aminek részletes vizsgálatát a K. M. L. 29. kötetének 105–107. oldalán láttuk (IV. és V. megoldás), egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

Szörényi Miklós (Pécs, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

III. megoldás. Az idézett versenyfeladat V. megoldásához fűzött megjegyzés szerint (1) bal oldalát $2abc$ -vel osztva a hányados $1 + \rho/r$, ahol ρ a háromszögbe, r pedig a köréje írt k kör sugara; így a jobb oldal $3/2$ -del egyenlő, elég tehát a $\rho/r \leq 1/2$, azaz $\rho \leq r/2$ egyenlőtlenséget bizonyítanunk.



Rajzoljunk kört a H háromszög oldalainak felezőpontjain át. Ennek a sugara $r/2$. Húzzunk a körnek a háromszög egyes oldalain túlnyúló ívéhez a megfelelő oldallal párhuzamos érintőt; ha valamelyik oldal érinti a kört, akkor az oldal egyenesét vegyük. Ezek egy a H -hoz hasonló és azt tartalmazó H_1 háromszöget alkotnak. Így H beírt körének sugara legfeljebb akkora lehet, mint H_1 -é, vagyis legfeljebb $r/2$, és ekkora is csak akkor lehet, ha H -t beírt köre mindhárom oldalának felező pontjában érinti, ami nyilvánvalóan csak szabályos háromszögnél következik be.

Megjegyzés. A $\rho \leq r/2$ egyenlőtlenségre további bizonyítások találhatók pl. *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.*: Matematikai versenytételek I. rész, 3. kiadás (Tankönyvkiadó, Budapest 1965) 40. o. és II. rész, 2. kiadás, 86. o.