

a) n helyére az első tíz természetes számot véve $2^n - 1$ értéke

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 15, \quad 31, \quad 63, \quad 127, \quad 255, \quad 511, \quad 1023,$$

és ezek 7-tel osztva rendre a következő maradékot adják:

$$1, \quad 3, \quad 0, \quad 1, \quad 3, \quad 0, \quad 1, \quad 3, \quad 0, \quad 1.$$

Nézzük meg, hogy a maradékoknak ez a periodikus ismétlődése folytatódik-e. Ha $n = 3k$, ahol k természetes szám, akkor

$$2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1^k = (8 - 1)A = 7A,$$

és itt A egész szám, mert bármely pozitív egész k kitevő esetén $a^k - b^k$ osztható $a - b$ -vel. $n = 3k + 1$ és $n = 3k + 2$ esetén pedig

$$2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{3k} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1 = 2 \cdot 7B + 1 = 7C + 1,$$

$$2^{3k+2} - 1 = 2^2 \cdot 2^{3k} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3 = 4 \cdot 7D + 3 = 7E + 3,$$

ahol B és D az első eset szerint egész számok, így pedig C és E is egész számok. Ezzel bebizonyítottuk, hogy pozitív egész n esetén $2^n - 1$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha n osztható 3-mal.

b) $2^n + 1 = (2^n - 1) + 2$, így 7-tel való osztásánál a maradék az előzők szerint sohasem 0, ugyanis $n = 3k$ esetén a maradék 2, $n = 3k + 1$ esetén 3, $n = 3k + 2$ esetén pedig 5.

Szalay Mihály (Budapest, Vörösmarty M. g. IV. o. t.)