

Emeljük köbre az egyenletet. A bal oldal köbét az $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$ azonosság szerint képezve a jobb oldali zárójel helyére mindjárt beírhatjuk (1) jobb oldalát:

$$\frac{a+x}{2a-x} + \frac{a-x}{2a+x} + 3\sqrt[3]{\frac{a^2-x^2}{4a^2-x^2}} = 1.$$

Átrendezéssel, újabb köbreemeléssel és rendezéssel

$$(2) \quad \begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{a^2-x^2}{4a^2-x^2}} &= \frac{-x^2}{4a^2-x^2}, \\ a^2(4a^2-3x^2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Nem lehet $a = 0$, különben (1)-nek nincs megoldása, mert bal oldala x minden 0-tól különböző értékére -2 . Ezért csak olyan x szám lehet gyök, amelyre (2) zárójeles kifejezése 0. Ez a két szám:

$$x_1 = 2a/\sqrt{3}, \quad x_2 = -x_1.$$

(2)-t az (1)-ből nem csupa ekvivalens átalakítással képeztük, ezért behelyettesítésével döntjük el, hogy gyöke-e (1)-nek x_1 . Ezt helyettesítve a köbgyökök alatti kifejezések:

$$\begin{aligned} \frac{a(1+2/\sqrt{3})}{a(2-2/\sqrt{3})} &= \frac{\sqrt{3}+2}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}+4)}{4(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^3}{8}, \\ \frac{a(1-2/\sqrt{3})}{a(2+2/\sqrt{3})} &= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^3, \end{aligned}$$

így (1) bal oldala 1, tehát x_1 gyöke az adott egyenletnek. Ugyanígy x_2 is, mert x helyett $-x$ -et írva a két köbgyök alatti kifejezés egymásba megy át.

Major Pál (Budapest, Bláthy O. erősáramú ip. t. III. o. t.)