Az $f=1$, $g=2$, $h=-2$, $k=-1$ számnégyesből kiindulva

$$u=27,\quad t=-99,\quad p=63,\quad q=-225,\quad r=153,\quad s=117,$$

és így $x=-162$, $y=288$, $z=36$. Az utolsó három szám köbösszege $19\,683\,000=270^3$, és itt 270 egyenlő az r-re és s-re adódott értékek összegével.

Hasonlóan az $f=-1$, $g=1$, $h=1$, $k=0$ négyesből $r=5$, $s=-12$; $x=-20$, $y=14$ és $z=17$, így $x^3+y^3+z^3=(-7)^3$, és ismét $-7=5-12$.

E két példából a következő egyenlőséget sejtjük:

$$(p+q)^3+(p-q)^3+(r-s)^3=(r+s)^3. \tag{1}$$

Ezt fogjuk bebizonyítani annak belátásával, hogy a bal és jobb oldal K különbsége 0. Evégett K-ból az adott képletek alapján egymás után kiküszöböljük q-t és r-et, majd p-t és s-et.

A zárójelek felbontása, összevonás és új kiemelések után a különbség így alakul

$$\begin{aligned}K&=\left[(p+q)^3+(p-q)^3\right]-\left[(r+s)^3-(r-s)^3\right]=\\&=2p(p^2+3q^2)-2s(s^2+3r^2).\end{aligned}$$

Az első zárójeles kifejezést képezve a négyzetek kétszeres szorzataiból adódó két tag összege 0, és a maradó kifejezés szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned}p^2+3q^2&=f^2t^2+9q^2u^2+3g^2t^2+3f^2u^2=\\&=(f^2+3g^2)(t^2+3u^2);\ \text{ugyanígy}\\s^2+3r^2&=(h^2+3k^2)(t^2+3u^2),\ \text{ezért}\\K&=2(t^2+3u^2)\left[p(f^2+3g^2)-s(h^2+3k^2)\right].\end{aligned}$$

Sejtésünk igazolására elég lesz megmutatnunk, hogy a szögletes zárójelbeli L kifejezés értéke mindig 0.

Célszerű egybetűs jelölést bevezetni az L-beli zárójeles kifejezésekre, mert ezek u-ban és t-ben is fellépnek. Legyen $f^2+3g^2=A$, $h^2+3k^2=B$, így p és s kiküszöbölésével és a tagok átcsoportosításával

$$\begin{aligned}L&=pA-sB=(ft+3gu)A-(ht+3ku)B=\\&=t(fA-hB)-u(3kB-3gA).\end{aligned}$$

Az első zárójelben u áll, a másodikban pedig t, így valóban $L=0$.

Minthogy f, g, h, k egész számok, ugyanez áll u-ra, t-re; r-re, s-re, ennélfogva (1) jobb oldalán $r+s$ egész szám. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Természetesen x, y, z is mindig egész számok.

Bárány Imre (Budapest-Mátyásföld, Corvin M.G.)

Több megoldás nem érkezett. Az eredeti kitűzés hibás voltára viszont többen rámutattak.