

A polinom alakoknak az x -et páratlan kitevővel tartalmazó tagjai 0 együtthatóval kell hogy szerepeljenek a szorzatban. Ez a feltétel egyenletrendszert szolgáltat a keresett együtthatókra. Ezt felírva az 5-öd, 3-ad és elsőfokú tag együtthatójára:

$$-1 + p = 0, \quad 2 - 6p - q + r = 0, \quad 2q - 6r = 0.$$

Innen $p = 1$, majd $q = -6$ és $r = -2$, végül (1) második tényezője és a szorzat polinom alakja:

$$x^3 + x^2 - 6x - 2, \quad \text{ill.} \quad x^6 - 13x^4 + 40x^2 - 4.$$

(2) esetében hasonlóan a következő rendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} (3) \quad & c + p = 0, \\ & e + dp + cq + r = 0, \\ (4) \quad & fp + eq + dr + cs = 0, \\ (5) \quad & fr + es = 0. \end{aligned}$$

Mindenesetre $p = -c$; r -et (3) alapján kiküszöbölve q -ra és s -re teljesülnie kell az

$$(4a) \quad (e - cd)q + cs = cf - cd^2 + de$$

$$(5a) \quad -cfq + es = -cdf + ef$$

rendszernek. Vonjuk ki (5a) c -szeresét (4a) e -szereséből:

$$(6) \quad (c^2f - cde + e^2)q = (c^2f - cde + e^2)d.$$

Tekintsük először azt az esetet, ha

$$(7) \quad c^2f - cde + e^2 = K$$

értéke nem 0. Ekkor a (4a), (5a) rendszer egyértelműen megoldható: $q = d$, továbbá $s = f$ (ugyanis s együtthatói, c és e közül legalább az egyik nem 0, különben $K = 0$ állna fenn). Ezekkel (3)-ból $r = -e$, és így (2) második tényezője, ill. polinom alakja

$$(8) \quad \begin{aligned} g(x) &= x^4 - cx^3 + dx^2 - ex + f, \\ x^8 + (2d - c^2)x^6 + (d^2 - 2ce + 2f)x^4 + (2df - e^2)x^2 + f^2. \end{aligned}$$

Ha $K = 0$, akkor $c \neq 0$ esetén (4a)-ból, majd (3)-ból

$$(9) \quad \begin{aligned} s &= f - d^2 + \frac{de}{c} + \left(d - \frac{e}{c}\right)q = f + \left(d - \frac{e}{c}\right)(q - d), \\ r &= -e - c(q - d). \end{aligned}$$

(8) felhasználásával (2) második tényezője így írható:

$$g_1(x) = g(x) + (q - d) \left(x^2 - cx + d - \frac{e}{c}\right),$$

akármilyen is q , és könnyen ellenőrizhető, hogy (2) kifejtése ebben az esetben is x -nek csak páros hatványait tartalmazza.

Ha pedig $K = 0$ és $c = 0$, akkor ezekből $e = 0$ és $p = 0$, így a (3) – (5) feltételi egyenletekben nem lép fel s , tehát s értéke is tetszés szerinti, másrészt (3)-ból $r = 0$. Erre az esetre (2) így alakul:

$$(x^4 + dx^2 + f)(x^4 + qx^2 + s),$$

már ebben az alakban sem lép fel x páratlan kitevős hatványa.

Surányi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az egyes tényezők páros és páratlan tagjait különválasztva könnyű különválasztani a szorzat páros és páratlan tagjait is. Az első esetben

$$\begin{aligned} [x(x^2 - 6) - (x^2 - 2)][x(x^2 + q) + (px^2 + r)] &= x^2(x^2 - 6)(x^2 + q) - \\ &- (x^2 - 2)(px^2 + r) + x\{(x^2 - 6)(px^2 + r) - (x^2 - 2)(x^2 + q)\}. \end{aligned}$$

Itt a kapcsos zárójelben összevonáskor minden tagnak ki kell esnie, így x minden értékére is el kell tűnnie a polinomnak. Az x^2 helyére 0-t, 2-t és 6-ot téve könnyen kiszámítható p , q , r .

A második szorzatból hasonlóan az adódik, hogy

$$(cx^2 + e)(x^4 + qx^2 + s) + (x^4 + dx^2 + f)(px^2 + r)$$

kell hogy azonosan 0 legyen. Itt kézenfekvő x^2 helyébe többek közt $-e/c$ -t helyettesíteni. Ekkor a második szorzat első tényezője $e^2/c^2 - de/c + f = (e^2 - cde + c^2f)/c^2$, ami rávilágít e kifejezés eltűnésének a szerepére a feladat megoldásában.