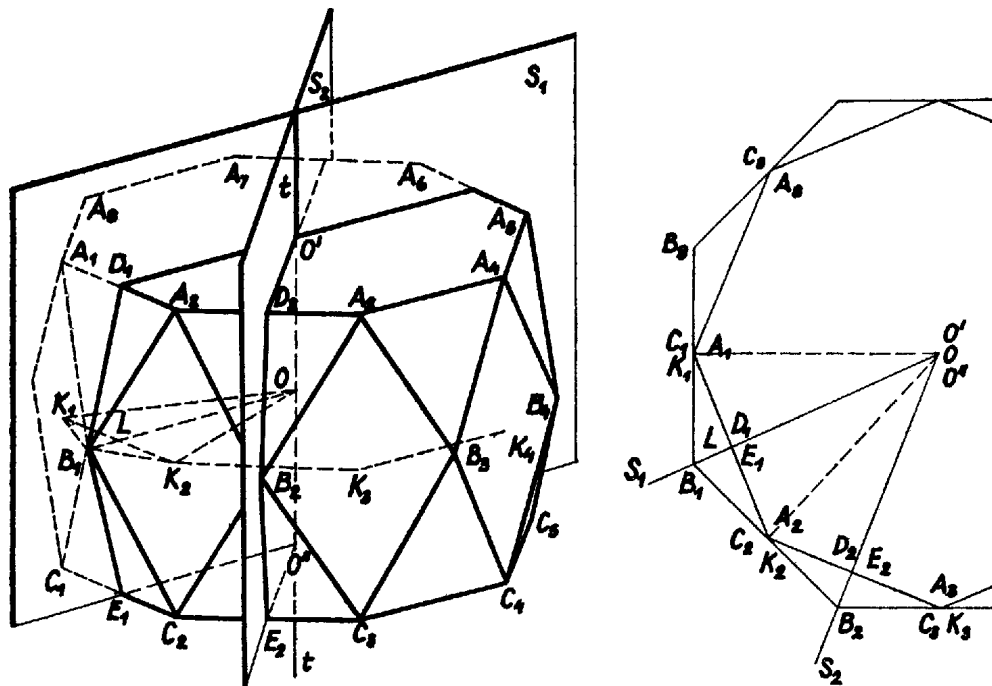


I. Építsük fel gondolatban a test modelljét a lapokat az előírt rendben egymás mellé illesztve. A test összes élei egyenlők, mert minden lapja egyenlő oldalú idom, legyen a közös hosszuk c . Legyenek az N' nyolcszöglap egymás utáni csúcsai A_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) az indexek növekedő rendjében, az $A_i A_{i+1}$ oldalhoz csatlakozó H_i háromszöglap harmadik csúcsa B_i (a 8-nál nagyobbak adódó indexek mindig 8-cal csökkentve értendők), továbbá a H_i és H_{i+1} közé illeszkedő rombusz $B_i A_{i+1} B_{i+1} C_{i+1} = R_{i+1}$. Így az R_i és R_{i+1} közé illeszkedő második háromszöglap $B_i C_i C_{i+1}$, és a C_i csúcsok az indexek növekedő rendjében az N'' nyolcszöglap egymás utáni csúcsai.



Megmutatjuk, hogy az N' és N'' középpontját összekötő tengely körül $k \cdot 45^\circ$ forgásokkal a test önmagával fedésbe jut, és a tengely felezőpontja a test középpontja. B_i Az $A_i A_{i+1}$ él S_i felező merőleges síkján van, és ezen van B_{i+4} is, mert N' szabályos volta miatt S_i az $A_{i+4} A_{i+5}$ él is merőlegesen felezi. B_i és B_{i+4} ugyanígy a $C_i C_{i+1}$ és $C_{i+4} C_{i+5}$ élek közös felező merőleges síkjának is pontjai, így pedig e két sík azonos, mert mindkettő merőleges N' és N'' síkjára, és a $B_i B_{i+4}$ egyenesen át csak egy merőleges sík állítható rájuk. N' és N'' síkját alapsíknak fogjuk nevezni. (Itt felhasználtuk, hogy B_i és B_{i+4} különböző pontok, és hogy összekötő egyenesük nem merőleges az alapsíkra; valóban, H_i -t és H_{i+4} -et alapélük körül forgatva B_i és B_{i+4} (S_i -beli) pályájának nincs közös pontja, mert N' két párhuzamos oldalának távolsága $c(1 + \sqrt{2})$, és ennek fele nagyobb a c oldalú szabályos háromszög magasságánál, $c\sqrt{3}/2$ -nél.) Az eddigiekből az is adódik, hogy $C_i C_{i+4} \parallel A_i A_{i+4}$, és hogy C_i ugyanazon az oldalán van S_i -nek, mint A_i .

Tekintsük most az 1-gyel nagyobb indexű pontokból ugyanígy adódó S_{i+1} síknak S_i -vel való t metszésvonalát (ami létezik, mert $A_{i+1} A_{i+2}$ nem párhuzamos $A_i A_{i+1}$ -gyel). t merőleges az alapsíkokra, és azokkal való O' , ill. O'' metszéspontja az illető lap középpontja. Ugyanis pl. O' annak a két egyenesnek a közös pontja, amelyeket S_i , S_{i+1} metsz ki az alapsíkból, ezek mindegyike szimmetriatengelye N' -nek, és két szimmetriatengely a szabályos sokszög középpontjában metszi egymást.

Legyen $A_i A_{i+1}$ felezőpontja D_i , $C_i C_{i+1}$ -é E_i , így $D_i O' O'' E_i$ téglalap, mert O' -nél és O'' -nél derékszöge van, és a nyolcszögek egybevágósága miatt $D_i O' = E_i O''$, ezért $D_i E_i \parallel t$, továbbá $A_i D_i E_i C_i$ is téglalap, tehát $A_i C_i \parallel t$.

Ezek szerint R_i -nek $B_{i-1} B_i$ átlója párhuzamos az alapsíkokkal, mert merőlegesen felezi az $A_i C_i$ átlót, és így minden B_i benne van $O' O''$ felező merőleges síkjában. A rombuszok K_i középpontjai (ebben a síkban) egy az N' -vel egybevágó N nyolcszöget alkotnak, oldalaik páronként párhuzamosak; legyen N középpontja O . Így OK_i felezi a $B_{i-1} O B_i = 45^\circ$ szöget, másrészt $K_i B_{i-1} = K_i B_i$, ezért $B_i B_{i-1}$ merőleges OK_i -re, és $OB_{i-1} = OB_i$, a B_i csúcsok egy N''' szabályos nyolcszög csúcsai, O valóban a test középpontja, és minden olyan forgatással és tükrözéssel önmagával fedésbe jut, amely N' -t és N'' -t önmagába viszi át.

Ebből következik, hogy egyrészt az A_i és C_i csúcsok, másrészt a B_i -k egy-egy O középpontú gömb felületén vannak, és ezek sugarainak nagyobbika adja a testet magába záró legkisebb gömb keresett sugarát.

II. A $K_1 K_2$ szakasz felező pontját L -el jelölve az $OK_1 L$, az $OK_1 B_1$, a $B_1 D_1 L$, végül az $OA_1 K_1$ derékszögű

háromszögből

$$\begin{aligned}
 OK_1 &= \frac{K_1 L}{\sin 22,5^\circ} = \frac{c}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}, & OB_1 &= \frac{OK_1}{\cos 22,5^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} = c\sqrt{2}, \\
 OL &= \frac{c}{2} \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{c}{2}(1+\sqrt{2}), & \text{és így} & B_1 L = \frac{c}{2}(\sqrt{2}-1), \\
 A_1 K_1 = D_1 L &= \sqrt{B_1 D_1^2 - B_1 L^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{4} - \frac{c^2}{4}(3-2\sqrt{2})} = \frac{c}{\sqrt[4]{2}}, \\
 OA_1 &= \sqrt{OK_1^2 + A_1 K_1^2} = c\sqrt{1+\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Az utóbbi nagyobb, mint $c\sqrt{1+1} = OB_1$, ezért a testet magába záró legkisebb gömb sugara $OA_1 \approx c \cdot 1,55$.

III. A testet az N' és N'' megfelelő oldalain átmenő síkokkal 8 egybevágó gúlára és egy N' alapú hasábra darabolhatjuk. A $B_1 A_1 A_2 C_2 C_1$ gúla térfogata $A_1 A_2 \cdot A_1 C_1 \cdot B_1 L / 3$, ahol $A_1 C_1 = 2A_1 K_1$, ez egyszersmind a hasáb magassága, így N' ismert területképlete alapján a test térfogata

$$V = A_1 A_2^2 \cdot A_1 C_1 \left(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} + 2(1+\sqrt{2}) \right) = c^3 \frac{2\sqrt[4]{8}}{3} (1+5\sqrt{2}).$$

Szemkeő Judit (Budapest, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.) dolgozata, bizonyítással kiegészítve.