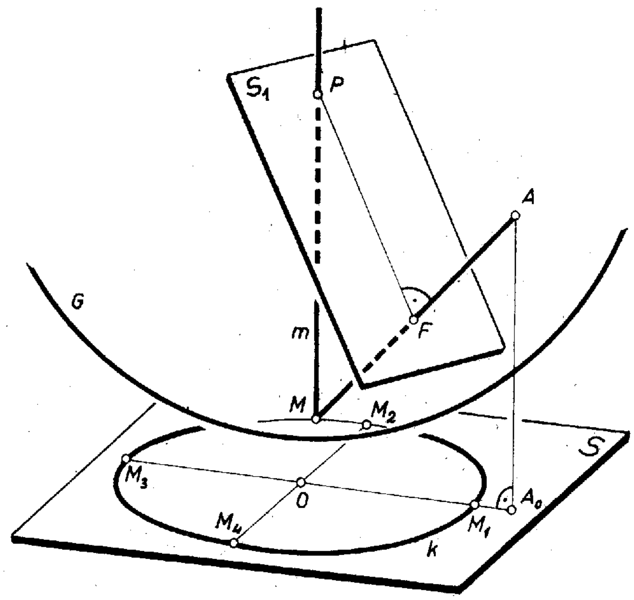
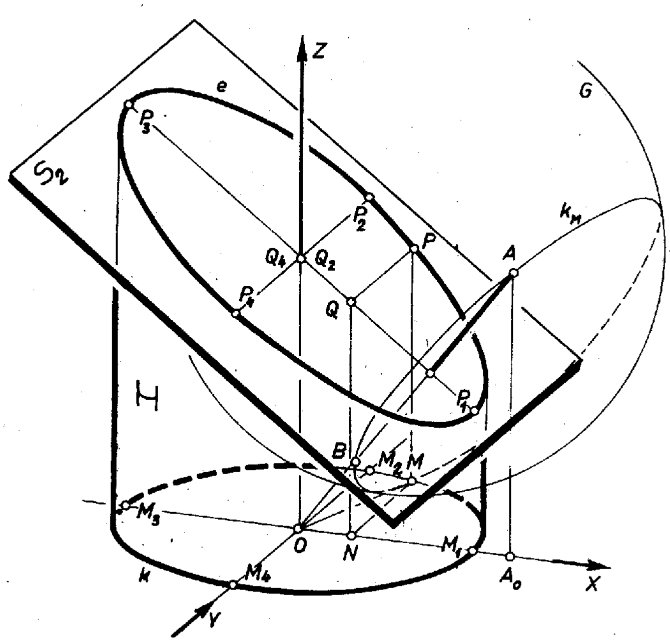
I. megoldás. k-nak bármely M pontjához szerkeszthető egy A-n átmenő és S-et M-ben érintő G gömb. Valóban, e gömb P középpontjának rajta kell lennie egyrészt az M-ben S-re állított m merőlegesen, másrészt az AM szakasz S_1 felező merőleges síkján. S_1-nek és m-nek mindig van egy határozott közös pontja, hiszen csak úgy lehetnének párhuzamosak, vagy S_1 úgy mehetne át m-en, ha S_1 merőleges lenne S-re, ekkor pedig M-mel együtt az AM egyenes és az A pont is S-ben lenne, a feltevéssel ellentétben. G sugara P-nek M-től való távolsága (1. ábra).



1. ábra

Az m egyenes annak a H hengerfelületnek egy alkotója, amelynek S-beli metszete k, és amelynek tengelye merőleges S-re; eszerint P rajta van H-n.

Újabb feltételt kapunk P számára, ha bebizonyítjuk a feladat állítását. Ugyanis a gömböknek az állítás szerinti további közös pontját B-vel jelölve AB minden szóban forgó gömbnek húrja, így P mindig az AB szakasz felező merőleges síkján, S_2-n van. Ezek szerint P csak H és S_2 metszésvonalán, e-n lehet. Ismeretes[1], hogy az e vonal általában ellipszis, amely lehet kör is, ti. ha S_2 merőleges H tengelyére, vagyis párhuzamos S-sel, aminek feltétele, hogy AB merőleges legyen S-re (2. ábra).



2. ábra

Rátérve az állítás bizonyítására, legyen k középpontja O, sugara r. Az $AOM = S_M$ sík G-t egy k_M körben metszi, és k_M-nek M-beli érintője az OM egyenes, mint S és S_M közös egyenese, mert G-nek nem lehetnek pontjai S két

[1] Lásd pl. *Lőrincz Pál: Ábrázoló geometria* a gimn. IV. o. számára, 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp., 1959. 63. o.

oldalán, és így k_M-nek sem OM két oldalán. Legyen OA és k_M második közös pontja B, és alkalmazzuk a körhöz külső pontból húzott szelőre és érintőre ismert tételt k_M-re és O-ra:

$$OA \cdot OB = OM^2, \qquad \text{innen} \qquad OB = \frac{OM^2}{OA} = \frac{r^2}{OA}, \tag{1}$$

állandó (itt $OA \neq 0$, mert O az S-ben van, A pedig az S-en kívül). Eszerint M bármely helyzetében k_M, és vele G is, átmegy az OA egyenes (1)-gyel meghatározott B pontján; az állítás helyes.

Amennyiben $OB = OA$ adódik, vagyis $OA = r$, akkor B azonos A-val, nincs a gömböknek további közös pontja. Ekkor viszont k_M mindig érinti az OA egyenest A-ban, és ugyanez áll minden G-re, tehát P az OA-ra A-ban merőlegesen álló síkon van.

Megmutatjuk, hogy az e metszésvonal minden P pontja hozzátartozik a keresett mértani helyhez: a P középpontú, A-n átmenő G gömb a k egy pontjában érinti S-et. Az érintési pont csak P-nek S-en levő M vetülete lehet, ez valóban a k-n van, hiszen P a H henger felületén van; így elég azt belátnunk, hogy G átmegy M-en. Ekkor a PM sugárra M-ben merőlegesen álló OM egyenes érinti G-t. Elég tehát megmutatnunk, hogy $PM = PA$. Mivel P az S_2 síknak is pontja, így az OB egyenesen levő P' merőleges vetülete[2] felezi az AB szakaszt. Ezért

$$\begin{aligned} AP^2 = AP'^2 + P'P^2 = AP'^2 + OP^2 - OP'^2 = OP^2 - (OP' - AP') \cdot (OP' + P'A) = \\ = OP^2 - (OP' - BP') \cdot (OP' + P'A) = OP^2 - OB \cdot OA. \end{aligned}$$

Ebből (1) és $OM = r$ folytán

$$AP^2 = OP^2 - OB \cdot OA = OP^2 - r^2 = OP^2 - OM^2 = PM^2,$$

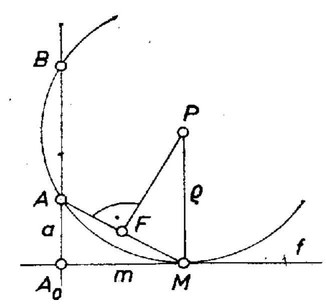
tehát az AP és PM távolságok egyenlők, M rajta van G-n. Ezt akartuk bizonyítani.

Lovász László (Budapest, Fazekas M. Gyak. G.)

II. megoldás. Tovább használjuk az I. megoldás jelöléseit, és felhasználjuk azt a megállapítást, hogy P a H hengerfelületen van, valamint a következő síkgeometriai segédtételt: „ha az f egyenes egy pontja M, és a sík egy f-en kívüli pontja A, akkor az f-et M-ben érintő és A-n átmenő kör sugara

$$\varrho = \frac{MA_0^2 + A_0A^2}{2A_0A} = \frac{m^2 + a^2}{2a}, \tag{2}$$

ahol A_0 az A vetülete f-re." Az állítás a 3. ábra PMF és MAA_0 derékszögű háromszögeinek hasonlóságából következik, F az AM szakasz felezőpontja, a feltevés miatt $a \neq 0$.

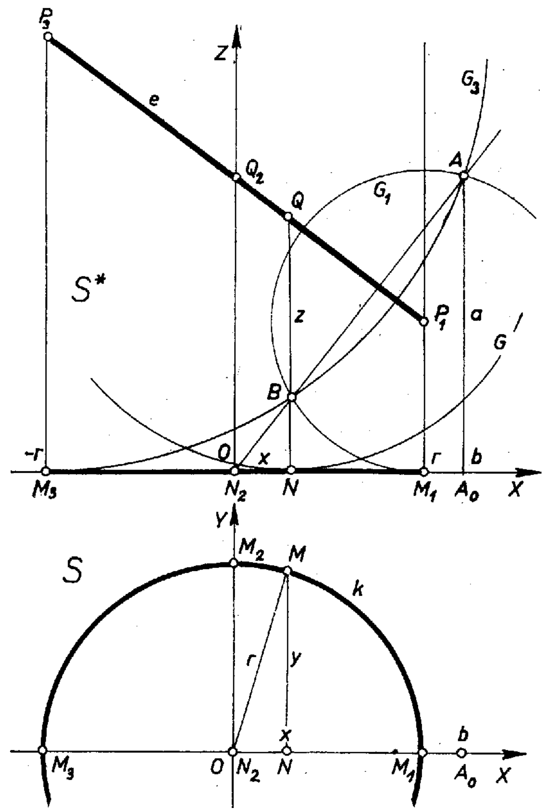


3. ábra

Ebből mindjárt adódik, hogy ha a 3. ábra síkja merőleges S-re, S-sel való metszésvonala f, és A_0 azonos O-val – vagyis amíg M körülfut k-n, A_0M állandó –, akkor ϱ is állandó, és P a H-nak egy az S-sel párhuzamos síkkal való metszetén, körön fut körül, hiszen ábránk H-nak bármelyik tengelymetszetét megadja. Ebben az esetben P-nek bármely az OA-n átmenő síkon való vetülete egyenesszakaszt ír le. Továbbá az is adódik, hogy a gömbök második állandó pontja az ábra B pontja, ill. $a = m = \varrho$ esetén nincs második állandó pont; ekkor viszont mindegyik gömb A-ban érinti az $A_0A = OA$ egyenest.

Megmutatjuk, hogy P-nek az OA-n átmenő és S-re merőleges S^* síkon levő Q vetülete mindig egyenesszakaszt ír le. Ebből már következik, hogy P mozgása abban a síkban folyik le, amely merőleges S^*-ra, és azt a mondott szakasz egyenesében metszi. A szakasz H és e sík metszésvonalának a vetülete.

[2] A 2. ábrán P' beírandó



4. ábra

M és Q mozgását egy–egy derékszögű koordinátarendszerben tekintjük. Legyen ezek közös origója O, közös X-tengelye az OA_0 egyenes, a másik tengely az S-beli rendszerben Y, az S^*-beliben Z, A_0 közös x koordinátája b, továbbá M vetülete X-en N, így az $MPQN$ négyszög téglalap; legyen végül $ON = x$, $NM = y$, $NQ = z$. M pályájának, k-nak egyenlete $x^2 + y^2 = r^2$. (2) felhasználásával Q ordinátája (3. és 4. ábra)

$$z = NQ = MP = \varrho = \frac{1}{2a}(a^2 + MA_0^2) = \frac{1}{2a}\left[a^2 + (b-x)^2 + y^2\right] = \tag{3}$$
$$= \frac{1}{2a}\left[a^2 + b^2 - 2bx + (x^2 + y^2)\right] = \frac{a^2 + b^2 + r^2}{2a} - \frac{b}{a} \cdot x.$$

Ez az XZ koordinátarendszerben valóban egyenes egyenlete. Az egyenesből Q a k-ra tekintettel a $-r \le x \le r$ szakaszt írja le (mégpedig 2-szer).

Az iránytényezőből látható, hogy a talált egyenes – és így P pályájának síkja is – merőleges OA-ra. $b \neq 0$ esetén az egyenes és a sík ferdén hajlik Z-hez, ami H-nak is tengelye, és így P pályája az I. megoldásbeli idézet szerint mindig ellipszis.

A vizsgált gömbök S^*-ot olyan körben metszik, amelynek középpontja Q, és amely átmegy A-n. Eszerint a (3) egyenes minden ilyen körnek szimmetriatengelye, tehát minden ilyen kör és minden gömb is átmegy A-nak az egyenesre való B tükörképen. B az OA egyenesen van.