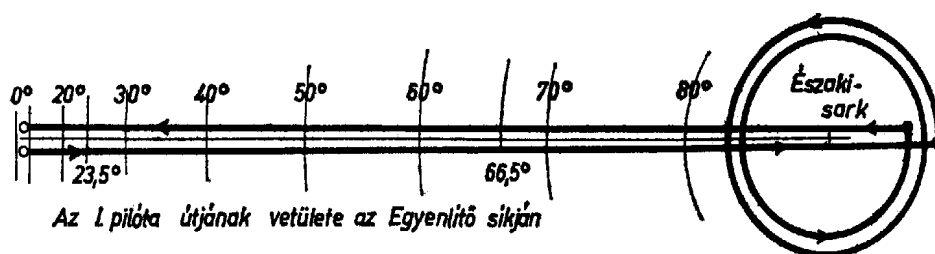


a) Az első pilóta – legyen a neve Elek – első hallásra valóban meglepő szavait megmagyarázhatjuk a második pilóta – nevezzük őt Mátyásnak – kérdése alapján. Mátyás tudta, hogy Elek legalább 10 000 km-t bejárt útvonalon repült. Ez a délkörön megtett első és harmadik útszakaszra vonatkozóan megérthető abból, hogy észak felé haladva az Északi-sark átlépése után már dél felé haladunk (megváltozik irányunknak a neve). Ha most valahol megállunk, majd ismét észak felé indulva az addigival egyenlő utat teszünk meg irányváltoztatás nélkül, akkor valóban visszaérkezünk kiindulópontunkba. – A 3. útszakasz kezdőpontjának az 1. útszakasz végpontjával való egybeesése viszont úgy lehetséges, hogy közben Elek egy szélességi körön repült (mindig az észak-déli irányra merőlegesen), és annak a szélességi körnek a kerülete egész számszor van meg a 2. szakasz 10 000 km-es hosszában. Mátyás éppen ennek a szélességi körnek kerületét kérdezte burkoltan Elektől, a válaszból aztán kiszámította a kör földrajzi szélességét, ebből pedig a felszállási hely szélességét.

Elek válasza szerint 15 000 km-nél kezdett repülni járt szakaszon, így a szélességi kör kerülete 5000 km. Másrészt a φ szélességű kör kerülete km-ben $40\,000 \cos \varphi$, mert r sugarára és a főkör R sugarára $r = R \cos \varphi$, továbbá $2R\pi = 40\,000$ km, így $\cos \varphi = 1/8$, $\varphi = 82,8^\circ$. Eszerint Elek az Északi-sark átrepülése után még $7,2^\circ$ -ot repült dél felé, és így előzőleg $82,8^\circ$ -ot észak felé, tehát felszállási helye az északi szélesség $7,2^\circ$ -án volt (1. ábra).

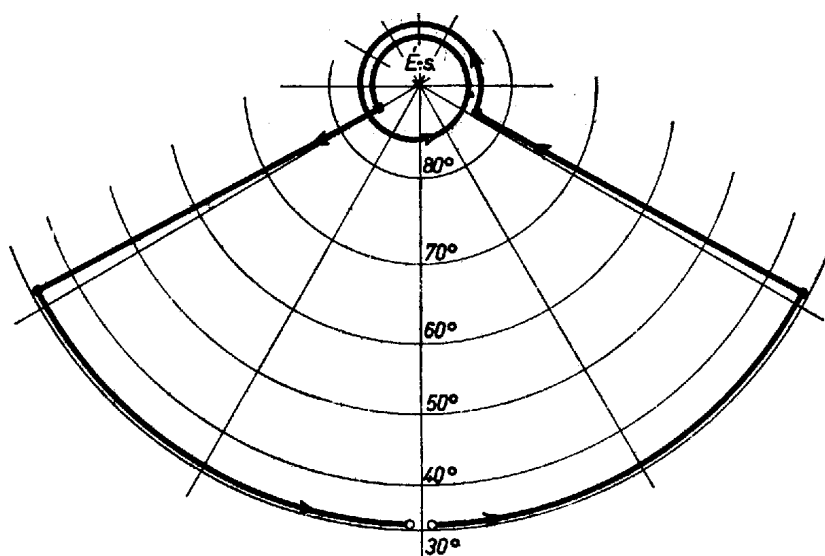


1. ábra

b) Mátyás a maga 2. és 4. útszakaszában délkörön repült, a többi háromban szélességi körön, mégpedig az 1. és 5. szakaszban ugyanazon a φ szélességű körön, különben nem ért volna vissza felszállási helyére.

Ha – a szokástól eltérően – az egész Földön csak keleti hosszúságról beszélünk, és a kezdő délkörön (Greenwich) való keleti irányú átrepüléskor nem vonunk le 360° -ot, akkor Mátyás gépének földrajzi hosszúsága az 1., 3. és 5. szakaszban növekedett, a 2. és 4. szakaszban nem változott, és az egész út folyamán 360° -kal, vagy annak egy egész többszörösével növekedett.

A 2. útszakaszban nem ért fel Mátyás az Északi-sarkig, mert ha azt átrepülte volna, akkor a 4. szakaszban délnek fordulva a kiindulásinál délibb körre jutott volna. A 6000 km-es útszakaszok a délkörön 54° változást eredményeznek a földrajzi szélességben, ezért Mátyás felszállási helyének szélessége 54° -kal kisebb a 3. útszakasz szélességénél.



A II. pilóta útjának vetülete az Egyenlítő síkján

2. ábra

Mátyás már egyszer átrepült útvonalon közel 2400 km-t repült.¹ Ez nem eshetett a 4. szakaszba, különben ez az egész útszakasz egyszer bejárt útvonal lenne, ami már magában 20 %. – Tegyük fel, hogy a mondott 2400 km a repülés 3. szakaszába esett. Így az ebben bejárt szélességi kör kerülete kb. $6000 - 2400 = 3600$ km (valamivel több ennél). Így e kör φ szélességére a fenti számításhoz hasonlóan $\cos \varphi \approx 3600 : 40\,000 = 0,09$, és így közel 85° adódik.² Ezen a körön

¹ A „közel 8 %-ot úgy értjük, hogy 7,5 %-nál több, de 8 %-nál kevesebb.

² A déli szélesség 85° -a nyilvánvalóan nem jön tekintetbe.

Mátyás egyszer körülrepült, és másodszor is megtette közel $2/3$ részét, így földrajzi hosszúsága a 3. útszakaszban közel $360^\circ + 240^\circ = 600^\circ$ -kal növekedett. Másrészt ekkor az 1. és 5. útszakasz kevéssel a 31° -os szélességi fok alatt volt, ennek kerülete $40\,000 \cos 31^\circ$, ezért a két 6000 km-es szakaszon $360^\circ \cdot 12\,000 / 40\,000 \cos 31^\circ = 108^\circ / \cos 31^\circ \approx 126^\circ$ -os hosszúságnövekedés állt be. Ez a fentivel 726° körüli összeget ad, ami jó közelítéssel két fordulat, innen tehát kellő finomítással megoldást várhatunk.

A földrajzi hosszúság növekedésének a 3. szakaszra eső részét hasonlóan kifejezve, φ -re a következő egyenletet kapjuk:

$$2 \cdot \frac{360^\circ \cdot 6000}{40\,000 \cos(\varphi - 54^\circ)} + \frac{360^\circ \cdot 6000}{40\,000 \cos \varphi} = 720^\circ,$$

$$\frac{6}{\cos(\varphi - 54^\circ)} + \frac{3}{\cos \varphi} = 40.$$

Ezt a szokásos módon átalakítva nem redukálható negyedfokú egyenletre jutunk; ezért közelítő megoldást keresünk próbálgatással.

$\varphi = 85^\circ$ esetén a bal oldal értéke $7,00 + 34,42 = 41,42$, ez $1,42$ többletet mutat a kívánt értékhez képest. φ csökkentésével mindkét nevező nő, és ezért a bal oldal csökken. Valóban, $\varphi = 84,5^\circ$ -ot véve már hiányt is mutat: $6,96 + 31,30 = 38,26$, hiánya $1,74$. Így a használt két φ érték között gyök várható, mégpedig a 85° -hoz kissé közelebb, mint a $84,5^\circ$ -hoz. Valóban $\varphi = 84,8^\circ$ esetén a bal oldal értéke $6,98 + 33,10 = 40,08$. – Eszerint Mátyás a $30,8^\circ$ -os északi szélességű körrel szállt fel, 3. útszakaszán a szélességi kör kerülete kb. 3626 km, így a kétszer berepült útvonala 2374 km, ami $7,9\%$.

Ennek igazolására megmutatjuk még, hogy nem lehetett kétszer berepült rész Mátyás útvonala 1. és 5. szakaszában. Ugyanis ezt téve fel az illető szélességi kör kerülete kevéssel több volna $2 \cdot 6000 - 2400 = 9600$ km-nél. Így szélességére közelítőleg $\cos \varphi = 0,24$, amiből egyrészt felszállási helyként csak a 76° -os déli szélességű kör valamely pontja jön szóba, a 3. útszakaszra pedig a 22° -os déli szélességű kör. Másrészt az 1. és 5. szakaszban elért hosszúságnövekedés csak kb. $360^\circ \cdot 12\,000 / 9600 = 450^\circ$, és ezt a kb. $37\,000$ km területű 22° -os körön megtett 6000 km nem növelhetné 510° -ra sem.

Egyszerűsítésekkel, kiegészítésekkel a következők dolgozataiból:

Patkós András (Budapest, Radnóti M. gyak. g. III. o. t.)

Siket Aranka (Makó, József A. g. III. o. t.)

Sükösd Csaba (Budapest, József A. g. III. o. t.)