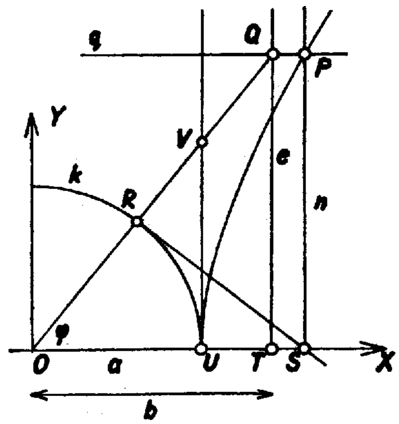
Az idézett szerkesztést tekinthetjük az $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ egyenletével adott ellipszis egy pontja ordinátájának szerkesztésére szolgáló eljárásnak is, ha adott a pont abszcisszája, vagy az abszcissza szerkesztésére szolgálónak adott ordináta esetében. Ha ugyanis a használt félegyenest az a, ill. a b sugarú körön levő pontjával jelöljük ki, ezzel megválasztottuk a szerkesztendő pont abszcisszáját, ill. ordinátáját. Hasonlóan kétféle kiindulással értelmezzük az $(x/a)^2-(y/b)^2=1$ egyenletű hiperbola pontjai szerkesztésének feladatát.

A bemutatandó eljárás abban hasonlít az idézetthez, hogy körzőt csak az első pont szerkesztésében használ, a további pontok szerkesztése derékszögű háromszögű vonalzó-pár használatával végezhető (feltéve, hogy megengedjük párhuzamos, ill. merőleges egyenes rajzolását csúsztatással, ill. átforgatással, amint ez az idézett eljárásban is szokásos). A hiperbola szimmetrikus a két tengelyre, ezért csak I. síknegyedbeli pontokra gondolunk, más szóval nem leszünk tekintettel a hiperbola tengelyeinek mint koordinátatengelyeknek az irányítására.



Előkészítésül megrajzoljuk az O origó körüli a sugarú k kört (hiperbolánk főkörét) és azt az e egyenest, amely merőleges az X-tengelyre és azt O-tól b távolságban metszi (a b szakasz az a és $OF_1=c$ szakaszokból $b=\sqrt{c^2-a^2}$ alapján megszerkeszthető). Adottnak tekintve a keresett P hiperbolapont y_1 ordinátáját, magát a pontot a következő lépésekkel kaphatjuk: 1. e-re az X-tengelybeli pontjától felmérjük y_1-et és a Q végponton át q merőlegest állítunk e-re; megrajzoljuk: 2. az OQ félegyenest, legyen a k-val való metszéspontja R; 3. k-nak R-beli érintőjét, legyen az X-tengellyel való metszéspontja S, végül 4. az S-en átmenő és az X-re merőleges egyenest; ennek a q egyenessel való metszéspontja a keresett P.

Megmutatjuk, hogy P-nek OS abszcisszája egyenlő a hiperbola egyenlete alapján az y_1 ordinátából számítható

$$x_1=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y_1^2}$$

értékkel. Messe az X-tengely pozitív fele e-t T-ben, k-t U-ban és k-nak U-beli érintője OQ-t V-ben. Ekkor ORS és OUV egybevágó háromszögek, OTQ pedig hasonló hozzájuk, így

$$OS=OV=\frac{OU}{OT}\cdot OQ=\frac{a}{b}\sqrt{OT^2+TQ^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y_1^2}=x_1,$$

amit bizonyítani akartunk.

Fordítva, ha P abszcisszája adott, azt az X-tengelyre felmérve kapjuk S-et, ebben n merőlegest állítunk X-re, másrészt S-ből érintőt rajzolunk k-hoz, az érintési pontot O-val összekötő egyenesen megkeressük az e-vel való metszéspontját, végül az ezen át az X-tengellyel párhuzamosan húzott q egyenessel n-ből kimetsszük P-t.

Eljárásainkat tekinthetjük a hiperbola (ill. az ellipszis) és valamelyik tengelyével párhuzamos egyenes metszéspontjai megszerkesztésének is.

Lovász László (Budapest, Fazekas M. G.)

Megjegyzések. 1. Az eljárás helyességét könnyen igazolhatjuk úgy is, hogy x-et és y-t a $QOT=\varphi$ szöggel fejezzük ki.

Kersner Róbert (Ajka, Bródy I. g. III. o. t.)

2. Több dolgozat körzővel vitte át az OV szakaszt OS-be vagy fordítva. Így k helyett az Y-tengelytől a távolságra levő UV egyenes rajzolandó meg. A fenti eljárás OV-nek OS-be való átvitelét ügyesen végzi el a körző mellőzésével, a fordított eljárásban viszont az érintőnek a vonalzó puszta odaillesztésével való megrajzolása a gyakorlatban hibákra vezethet.