

Egy halom esetén egyetlen vesztes állás az, amelyben egyetlen kő áll az asztalon, jelöljük így: (1); a soron következő kénytelen ezt elvenni, és vesz. Azok az állások, amelyekből az (1) végző vesztes állás előállítható, más szóval a végző megnyerhető állások csak (1, a) és (b) típusúak lehetnek, ahol $a \geq 1$ és $b \geq 2$. Ilyen állás visszahagyására kell kényszeríteni ellenfelünket utolsó előtti lépésében, az ő ezen lépése előtti állásnak viszont (1, a)-tól és (b)-tól különbözőnek kellett lennie, különben mi veszünk. Így az állás típusa nem lehetett más, mint vagy (1, a , c), ahol $c \geq 1$, vagy (d , a), ahol $d \geq 2$, ilyenkor azonban nem lehet $a = 1$. Az utóbbi típus adódik (b)-ből is (b , e) alakban, ahol $e \geq 2$.

Azonban ilyen típusú állásból csak akkor kényszerül az ellenfél nekünk megnyerhető állás előállítására, ha c és d nem nagyobb a legkisebb lehetséges értéknél, vagyis ha (1, a , c)-ben $c = 1$, és emiatt egyszersmind $a = 1$, ill. ha (d , a)-ban $d = a = 2$; különben ugyanis kevesebbet is vehet el. Csak az (1, 1, 1) és a (2, 2) állások biztosítják, hogy az ellenfél két lépésben veszít.

Innen adódik, hogy (e , e) minden $e > 2$ esetén is vesztes állás. Ha ugyanis az ellenfél az egyik halmot kiüríti, akkor mi a másiktól 1 követ hagyunk; ha ő hagy 1-et, mi ürítjük ki a másikat, ha pedig 1-nél többet hagy, mi ugyanannyira csökkentjük a másik halmot, tehát vagy már a 2. lépésében vesz a partner, vagy legkésőbb a (2, 2) állásból. – Más két halmos vesztes állás nincs, ti. (e , f) típusú, ahol $f > e \geq 2$, mert ebből az ellenfél állíthat elő (e , e) típusú, számunkra vesztes állást.

Az (e , e) az eredeti játékmódban is vesztes állás, minden e esetén, és ott sincs más két halmos vesztes állás. Eszerint két halmos vesztes állások csak azok az állások, amelyek a nim eredeti játékmódja szerint azok, kivéve közülük az (1, 1)-et.

Az (1, 1, 1) legkisebb összegű három halmos vesztes állás (vesztes trió) utáni legkisebb összegű vesztes trió (1, 2, 3), összege 6, ugyanis a 4 és 5 összegűek megnyerhetőek: (1, 1, 2)-ből az (1, 1, 1) állítható elő, és (1, 1, 3)-ból is, (1, 2, 2)-ből pedig a (2, 2); másrészt az (1, 2, 3) vesztes trió, mert ha nem üríti ki azt a halmot, amelyből elvesz, akkor legalább 4 kő marad, amit most láttunk, ha pedig kiüríti, akkor (0, 2, 3)-ból a (2, 2) állítható elő, különben pedig az (1) vesztes állás. – Az (1, 2, 3) ugyancsak vesztes trió az eredeti játékmód esetén is.

Megmutatjuk, hogy minden az eredeti játékmód szerinti vesztes trió a módosítás stratégiájában is vesztes trió. Tudjuk, hogy ha egy eredeti vesztes trióban van 1 kőből álló halom, akkor az (1, $2k$, $2k + 1$) típusú. Ebből már csak a $k > 1$ esetet kell tekintenünk. Ha ebből ellenfelünk az 1-es halmot veszi el, mi ($2k$, $2k$)-t állítunk elő; ha a másik két halom bármelyikéből 2-nél kevesebb követ hagy, akkor (1)-et vagy (1, 1, 1)-et, ha pedig legalább 2 követ hagy, akkor mi a másik nagy halomban 1-gyel több, ill. kevesebb követ hagyunk aszerint, hogy ő páros vagy páratlan számú követ hagyott vissza, és így (1, $2m$, $2m + 1$) alakú állást (ahol $1 \leq m < k$), azaz eredeti vesztes állást hagyunk ellenfelünkre.

Már csak azok az eredeti vesztes triók vannak hátra, amelyekben mindegyik halomban legalább 2 kő van. Tudjuk, hogy ilyenek minden halmában különböző számú kő van, így sem az (1), sem az (1, 1, 1), sem (e , e) nem állítható elő belőle, ezért ellenfelünk bármely lépésére az eredeti stratégia szerinti lépéssel válaszolunk.

Stratégiánk csak akkor használható, ha a kiindulási állás vesztes állás és a partner kezd, vagy pedig ha a kiindulási állás megnyerhető és mi kezdünk, (végül, ha a partner hibáz).

Veres Ferenc (Miskolc, Kilián Gy. G.)
Surányi László (Budapest, Fazekas M. Gyak. G.)

¹Lásd a következő cikket: Dr. Báron Gyula: A nim-játék stratégiájáról, a nyerő stratégia felkutatása, K. M. L. 28. (1964) 193–198. o. – Röviden ismétljük a szükséges tudnivalókat. A játékot ketten játsszák, miután bizonyos számú, meg nem különböztetett elemet, pl. követ tetszés szerinti számú halomba osztottak. Felváltva lépnek, egy lépés abban áll, hogy valamely halomból elvesznek valamennyi követ, legalább 1-et, de akár az egész halmot is. Az nyer, aki az utolsó követ veszi el, akár magában, akár az utolsó halom még meglévő köveivel együtt. A nyerő stratégia lényege, hogy húzásunkkal mindig ún. *vesztes állást* állítsunk ellenfelünk elé, amelyből bármely megengedett elvétellel számunkra *megnyerhető állást* állít elő. Van ilyen stratégia: azok a vesztes állások, amelyekben a halmokban levő elemek számát 2-es számrendszerben felírva az egyenlő helyi értékű számjegyek összege mindig páros. Két halom esetén minden vesztes állásban a halmok köveinek száma egyenlő: (a , a); három halmos vesztes állásban viszont nem lehet két halomban ugyanannyi kő.