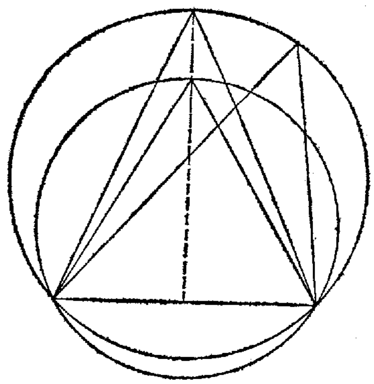
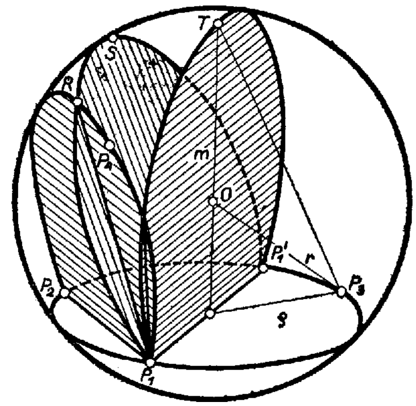
A kérdés „elég” szava minden egyes n értékhez a legkisebb olyan d_n átmérő meghatározását kívánja, amelyre a d_n átmérőjű gömb felületén még elhelyezhető n pont úgy, hogy ne zavarják egymást. A megadandó d_n értékek közül csak néhányról fogjuk megmutatni, hogy azok valóban a legkisebb megfelelő értékek, a további esetekben csak néhány kínálkozó pontelrendezés közül választjuk ki a legkisebb gömbön elhelyezhetőt, túl terjedelmes bizonyítások és diszkussziók elkerülése végett.





$n=2$. Két pont az 1 átmérőjű gömbön 1 távolságra van, ha átellenes pontok, kisebb gömbön pedig mindig 1-nél kisebb távolságra van, tehát $d_2=1$.

$n=3$. A 3 ponton átmenő sík a gömbből kört metsz ki. A gömb átmérője legalább akkora, mint ezé a köré, így d_3 annak a legkisebb gömbnek is átmérője, amelyen még elhelyezhető 3 pont úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1 legyen. Minden ebbe a körbe írt, legalább 1 hosszúságú oldalakkal rendelkező háromszög egyik oldala éppen 1 hosszúságú, mert különben ez a kör kicsinyítésével volna elérhető. Az egységnyi oldal fölé írt *egyenlő szárú* háromszög szárai nagyobbak *más* háromszögben az egységnyi oldallal szomszédos kisebb oldalnál, így biztosan megfelel a feltételeknek, és az e köré írt kör akkor a legkisebb, ha a szárak is egységnyiek, vagyis a háromszög szabályos. Az e köré írt kör átmérője: $d_3=2/\sqrt{3}\approx 1{,}155$.

$n=4$. Lehet mind a 4 pont egy síkban, s így a gömb egy körén, vagy 3 egy körön, a negyedik nem ezen a körön. Az első esetben az előzőkhöz hasonlóan látható, hogy a kör legkisebb, ha a pontok egy beleírt egységnyi oldalú négyzet csúcsai; ekkor átmérője $\sqrt{2}$ és ez egyben a kört tartalmazó legkisebb gömbfelület átmérője is.

Ha a 4 pont nincs egy síkban, akkor jelöljük valamelyik 3 pont, mondjuk P_1, P_2, P_3 síkja által kimetszett k kör sugarát ϱ-val. A P_4 pont távolsága P_1 és P_2 valamelyikétől nem nagyobb, mint a P_1, P_2, P_4-en átmenő körben a P_1P_2-re merőleges átmérőn a húrtól távolabbi végpont, R távolsága. R-nek P_1 től való távolsága ismét nem nagyobb, mint a P_1 en, R-en és a P_1-gyel a k körben átellenes P_1' ponton átmenő körben a P_1P_1'-re merőleges átmérő távolabbi S végpontjának távolsága P_1-től; ez viszont nem nagyobb, mint a P_1P_1' főkörben a P_1P_1'-re merőleges átmérő távolabbi T végpontjának távolsága P_1-től (vagy a k kör bármely pontjától).

Ha tehát P_1, P_2, P_3, P_4 nem zavarja egymást, akkor P_1, P_2, P_3, T sem. Az ezeken átmenő gömb átmérője, adott ϱ mellett, akkor a legkisebb, ha T távolsága a másik három ponttól legkisebb, tehát 1. Ekkor, a gömb sugarát r-rel jelölve, T távolságát pedig a ϱ sugarú körtől m-mel:

$$r^2=\varrho^2+(m-r)^2,\quad \text{innen}$$

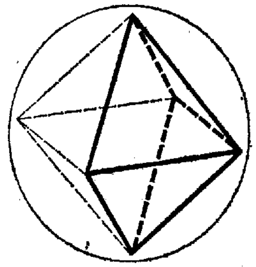
$$2r=\frac{\varrho^2+m^2}{m}=\frac{TP_3^2}{\sqrt{TP_3^2-\varrho^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}.$$

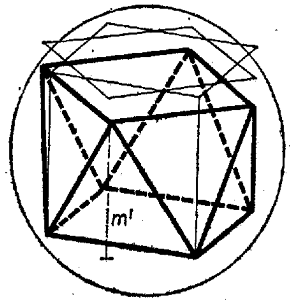
Ez akkor a legkisebb, ha ϱ a lehető legkisebb. Mivel a k körbe háromszög írható 1-nél nem kisebb oldalakkal, így az $n=3$ esetből tudjuk, hogy ϱ minimális értéke $1/\sqrt{3}$. Így $2r$ minimális értéke

$$d_4=\sqrt{\frac{3}{2}}\approx 1{,}225.$$

(Ez valóban kisebb az első esetben adódott $\sqrt{2}$ értéknél.) A négy pont ekkor egy szabályos tetraéder négy csúcsa.

$n=5$ esetben, ha az összes pont egy síkban van, akkor az egységnyi oldalú szabályos ötszög köré írt kör átmérője, $1/\sin 36^\circ$ adódik a legkisebb gömbátmérőnek. Ha a pontok nincsenek egy síkban, akkor van köztük 3, amelyek síkja a másik 2 pontot elválasztja. Ez könnyen látható, ha nincs 4 pont egy síkban, ha pedig 4 egy síkban van, akkor közülük kettőn, amelyek a gömbből kivágott körön elválasztják a másik kettőt, továbbá az ötödik ponton átmenő sík megfelel a kívánt feltételnek. Az $n=4$ esetben követett gondolatmenethez hasonlóan látható be ismét, hogy egymást nem zavaró pontötösből újra ilyent kapunk, ha az elválasztó síkon kívül levő két pontot a síkra merőleges átmérő végpontjaival helyettesítjük. Egy ilyen pontötöst tartalmazó gömb sugara pedig akkor a legkisebb, ha a sík a gömböt főkörben metszi, és ennek pontjai az átmérő végpontjaitól egységnyi távolságra vannak. Az átmérő végpontjai és a főkörön levő bármelyik pont egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkot, s így a gömb átmérője $\sqrt{2} = 1/\sin 45^\circ < 1/\sin 36^\circ$; tehát $d_5 = \sqrt{2} \approx 1{,}414$. A főkörön levő pontok választásában csak annyi megkötésünk van, hogy bármelyik két pont közti kisebb ív legalább negyedkör legyen. Ha két csatlakozó negyedkör összesen 3 végpontját vesszük, akkor egy szabályos négyoldalú gúlát kapunk, amelynek minden éle egységnyi.





$n = 6$-ra áttérve – az eddigiekkel ellentétben – nem növekszik a legkisebb átmérő értéke, mert az előbb említett gúla csúcsát az alapnégyzetre tükrözve a $\sqrt{2}$ átmérőjű gömbbe írt szabályos oktaédert kapunk, csupa egységnyi éllel. 5 vagy 6 pontot helyezve egy síkba, nagyobb ($1/\sin 36^\circ$, ill. 2) átmérőjű gömb adódik. Így $d_6 = d_5 = \sqrt{2}$ Ennél kisebb átmérő nem adódhat, hiszen a 6 pont közül bármelyik 5 sem zavarja egymást, tehát $d_6 \geqq d_5$.

$n = 8$ esetén elsőnek az egységnyi élű kocka csúcsaiba ültetjük pontjainkat, ekkor az átmérő $\sqrt{3} \approx 1{,}732$; azonban kisebb átmérőjű elrendezést kapunk a felső 4 pont 45°-os elforgatásával és az alsó négyhez való közelítésével olyan m' távolságra, hogy a megnyúlt oldalélek újra egységnyire csökkenjenek. Ekkor az oldalél egyik végpontjából a másikba az eredeti kockaélekkel párhuzamos $1/2$, m', $1/\sqrt{2} - 1/2$ hosszúságú elmozdulásokkal juthatunk el, így Pythagoras tétele alapján

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + m'^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1, \text{ innen } m'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

és a pontrendszer köré írt gömb r sugarára, átmérőjére

$$r^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m'}{2}\right)^2, \qquad 2r = \sqrt{2 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 1{,}645.$$

Huhn András (Szeged, Ságvári E. Gyak. G.)
Treer Mária (Budapest, Kaffka M. G.).