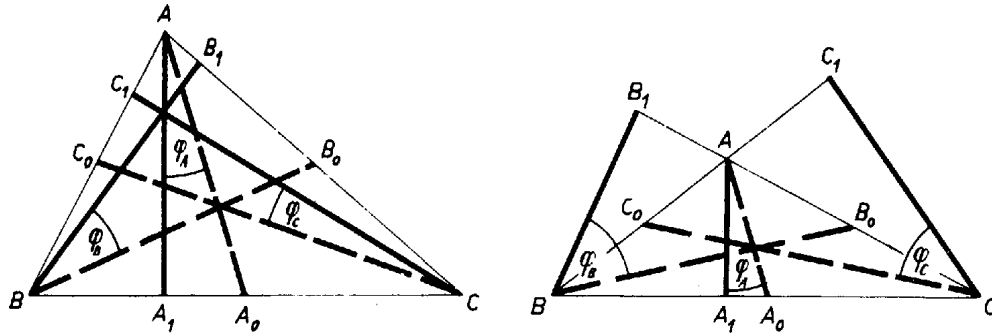


Legyen a BC , CA , AB oldal felezőpontja rendre A_0 , B_0 , C_0 és az A , B , C -ből húzott magasság talppontja rendre A_1 , B_1 , C_1 . Ekkor a bizonyítandó állítás így írható:

$$(1) \quad \frac{A_1A_0}{A_1A} + \frac{C_1C_0}{C_1C} - \frac{B_1B_0}{B_1B} = 0.$$



Egyenlő szárú háromszögre b egyenlő a -val vagy c -vel, így φ_B is φ_A -val vagy φ_C -vel, és a másik 0; tehát az állítás igaz. A továbbiakban feltesszük, hogy $a > b > c$, és így $\alpha > \beta > \gamma$. A pontok sorrendje a BC oldalon B -től C felé A_1 , A_0 , – mert a BC -re A_0 -ban emelt merőlegesnek A azon az oldalán van, mint B –, a CA oldalegyenesen C , B_0 , B_1 , a BA oldalegyenesen B , C_0 , C_1 . Az utóbbi két oldalegyenesen az A csúcs $\alpha < 90^\circ$ esetén a magasságtalppont után következik, $\alpha > 90^\circ$ esetén közvetlenül előtte, $\alpha = 90^\circ$ esetén pedig egybeesik vele.

$\alpha < 90^\circ$ esetén az ABB_1 és ACC_1 hasonló derékszögű háromszögekből

$$(2) \quad (\text{ctg } \alpha =) \quad \frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}, \quad \text{azaz} \quad \frac{AB_0 - B_1B_0}{B_1B} = \frac{AC_0 - C_1C_0}{C_1C}.$$

Az átalakítás $\alpha \geq 90^\circ$ esetén is érvényes, ha az AC , ill. AB egyenesen irányítást vezetünk be, és pozitívnak vesszük az A -tól C , ill. B felé mutató irányt. Hasonlóan a BCC_1 és BAA_1 , valamint a CAA_1 és CBB_1 hasonló háromszögpárokból

$$(3) \quad (\text{ctg } \beta =) \quad \frac{BC_1}{C_1C} = \frac{BA_1}{A_1A}, \quad \text{azaz} \quad \frac{BC_0 + C_0C_1}{C_1C} = \frac{BA_0 - A_1A_0}{A_1A},$$

$$(4) \quad (\text{ctg } \gamma =) \quad \frac{CA_1}{A_1A} = \frac{CB_1}{B_1B}, \quad \text{azaz} \quad \frac{CA_0 + A_0A_1}{A_1A} = \frac{CB_0 + B_0B_1}{B_1B}.$$

Most már (2)–(4) átalakításaiban a bal és a jobb oldalakat összeadva a kapott egyenlőségéből $AB_0 = B_0C$, $BC_0 = C_0A$ és $CA_0 = A_0B$ figyelembevételével és rendezéssel (1)-et kapjuk.

Bojtár János (Budapest, Lécai J. 12. évf. isk. IV. g. o. t.)