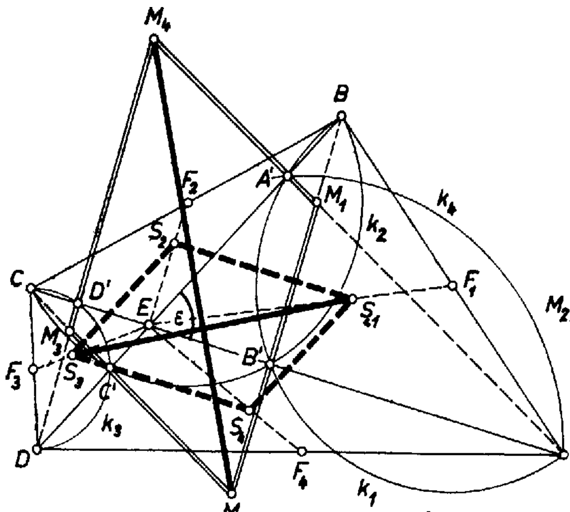
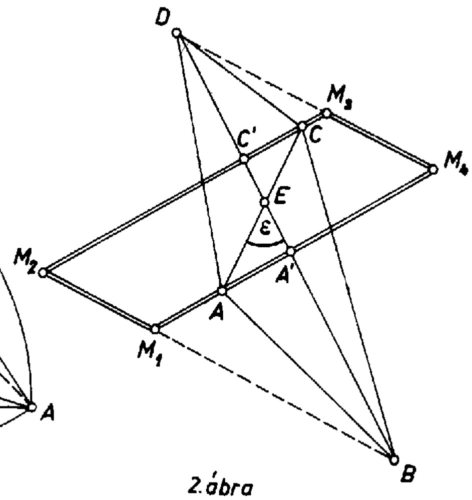
I. megoldás. Legyen az $ABE = H_1$, $BCE = H_2$, $CDE = H_3$, $DAE = H_4$ háromszög magasságpontja és súlypontja rendre M_i, ill. S_i ($i = 1, 2, 3, 4$); (1. ábra). Megmutatjuk, hogy az M_i pontok – és az S_i-k is – egy-egy paralelogramma csúcsai, azok egymáshoz azonos körüljárással hasonlók, és megfelelő oldalaik merőlegesek egymásra. Ebből már következik, hogy egyiket $90°$-kal elforgatva a másikkal hasonló helyzetbe jut. Végül megmutatjuk, hogy a kérdéses M_1M_3 és S_2S_4 szakaszok a paralelogrammák megfelelő átlói, tehát ezek is merőlegesek. – Ha az AC és BD átlók merőlegesek, akkor mindegyik M_i azonos E-vel, az állítás tárgytalan, ezért feltesszük, hogy az átlók nem merőlegesek, és a betűzést úgy választjuk, hogy $AEB = \varepsilon$ hegyesszög.



1. ábra



2. ábra

H_1-nek és H_2-nek B csúcsa és a vele szemben levő oldalának AC egyenese közös, ezért S_1S_2 párhuzamos AC-vel, hiszen S_1 is, S_2 is harmad akkora távolságban van AC-tól, mint B, ugyanazon az oldalon. Ugyanígy $S_3S_4 \| AC$, tehát $S_3S_4 \| S_1S_2$, továbbá $S_1S_4 \| BD \| S_2S_3$, az $S_1S_2S_3S_4 = S$ négyszög valóban paralelogramma. S oldalainak hossza $S_1S_2 = AC/3$, $S_1S_4 = BD/3$.

M_1 és M_2 a B-ből AC-re bocsátott merőleges pontjai, ezért M_1M_2 merőleges AC-re, ugyanígy M_3M_4 is, így $M_1M_2 \| M_3M_4$, hasonlóan $M_1M_4 \perp BD \perp M_2M_3$, tehát az $M_2M_1M_4M_3 = M$ négyszög paralelogramma. Továbbá M és S két-két oldala merőleges: M_2M_1 és M_4M_3 merőleges S_1S_2-re, M_3M_2 és M_1M_4 merőleges S_2S_3-ra, így a két paralelogramma szögei egyenlők, mert merőleges szárú szögek vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek, és egy paralelogramma szögei ugyancsak kiegészítő szögek.

Legyen az A, B, C, D csúcs vetülete a vele szemben levő átlón rendre A', B', C', D'; ekkor $M_1M_2 = A'C'/\sin\varepsilon$, másrészt $A'C' = AC\cos\varepsilon$, ezért $M_1M_2 = AC\operatorname{ctg}\varepsilon$, hasonlóan $M_2M_3 = BD\operatorname{ctg}\varepsilon$, így az oldalak aránya

$$M_3M_2 : M_2M_1 = BD : AC = S_4S_1 : S_1S_2.$$

Ebből és a szögek egyenlőségéből következik M és S hasonlósága, mert véve egy-egy egyenlő szögüket, az ennek csúcsával szemben fekvő átló M-et is, S-et is páronként hasonló háromszögekre bontja, továbbá körüljárásuk egyező volta, mert a figyelembe vett egyenlő szögek merőleges szárain vannak az egymással arányos oldalszakaszok.

Hátra van még annak belátása, hogy az M_1 csúcsnak S_2 felel meg, ezeknél vannak tompaszögek. Mindegyik S_i az E pont körüli négy szögtartomány közül abban van, amelyikben a megfelelő H_i, mert a súlypont mindig a háromszög belsejében van, így $S_1S_2S_3\sphericalangle = CEB\sphericalangle = 180° - \varepsilon$, váltószögek. M_2 a H_4-et, M_4 pedig a H_2-t tartalmazó szögtartomány pontja, mert tompaszögű háromszög magasságpontja a tompaszög csúcsából induló magasságnak a csúcson túli meghosszabbításán van. M_1 viszont a H_1-et tartalmazó szögtartományban van, vagy a határán, amíg csak az EAB és EBA szögek egyike sem tompaszög, ekkor az $M_2M_1M_4$ és AEB szögek összege $180°$, M_1-nél tompaszög van, amint állítottuk. [1]

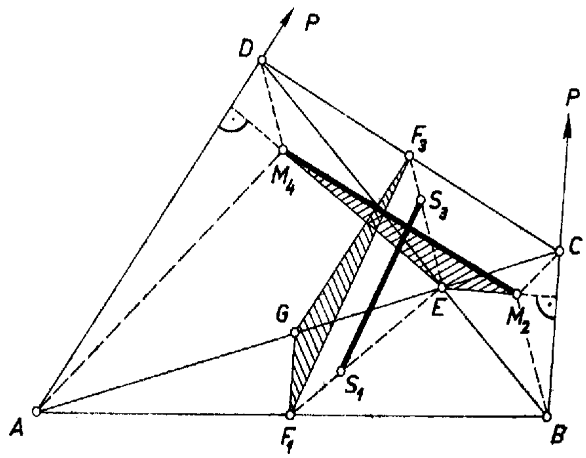
Ha pedig H_1-ben, mondjuk A-nál, tompaszög van (2. ábra), akkor M_1 is az AED szögtartomány pontja, de B-höz közelebb van, mint M_2, mert a BD átlón levő A', C' vetületeik közül A' van közelebb B-höz, hiszen BEA hegyesszög, BEC pedig tompaszög. Így $AM_1B\sphericalangle = A'EA\sphericalangle = \varepsilon$, és $M_2M_1A'\sphericalangle = M_2M_1M_4\sphericalangle$ ennek kiegészítő szöge.

Mindezekből – mint láttuk – következik az állítás.

Pelikán József (Bp., Fazekas M. G.) dolgozatából, kiegészítésekkel.

II. megoldás. A feladat szövegének megfelelően konvex négyszögre szorítkozunk, feltesszük továbbá ismét, hogy az átlók nem merőlegesek. Jelöljük AB, AC és DC felezőpontját rendre F_1, G, F_3-mal (3. ábra), egyébként az I. megoldás jelöléseit használjuk.

[1] Ebben az esetben könnyű látni, hogy az $M_1M_2M_3M_4$ körüljárás ellentétes $S_1S_2S_3S_4$-gyel; ez a további esetekben is belátható.



3. ábra

S_1 és S_3 az EF_1, EF_3 szakaszok E-től távolabbi harmadoló pontja, így $S_1S_3 \| F_1F_3$. Azt kell megmutatnunk, hogy M_2M_4 merőleges erre a középvonalra. Ez világos, ha $AD \| BC$. Tegyük fel, hogy ez nem áll. A betűzést válasszuk úgy, hogy a két oldal D-n, ill. C-n túli meghosszabbítása messe egymást egy P pontban.

Megmutatjuk, hogy $M_2EM_4\Delta \sim F_1GF_3\Delta$, a két háromszög egyező körüljárású és egymáshoz képest $90°$-kal vannak elforgatva. Ebből következik, hogy M_2M_4 és F_1F_3 oldalaik merőlegesek.

F_1G és GF_3, mint az $ABC\,\Delta$ és $CAD\,\Delta$ középvonala, párhuzamos és egyirányú BC-vel, ill. AD-vel, és fele akkora, mint a megfelelő oldal. Így $F_1GF_3\sphericalangle = 180° - BPA\sphericalangle$, és az $ABCD$ és F_1GF_3 körüljárás ellentétes.

Ha a $BEC\sphericalangle$ (és így $DEA\sphericalangle$ is) hegyesszög, akkor M_2 és M_4 az E-ből a szemközti oldal felé haladó félegyenesen van, ha pedig a mondott szög tompaszög, akkor mindkét magasságpont az ellentétes irányú félegyenesen van, így $M_2EM_4\sphericalangle = 180° - BPA\sphericalangle$, és az M_2EM_4 körüljárási irány ellentétes a BPA, és vele együtt az $ABCD$ körüljárási iránnyal.

Az oldalak arányának megállapítására azt fogjuk felhasználni, hogy egy TUV háromszög magasságpontját Z-vel jelölve $UZ = TV|\mathrm{ctg}\ TUV\sphericalangle|$. (Ez belátható a szinusz-tételt alkalmazva pl. az UVZ és TUV háromszögre, vagy azt használva fel, hogy a magasságpontnak bármelyik oldalra vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van.) Ennek felhasználásával

$$\frac{M_2E}{EM_4} = \frac{BC\,|\mathrm{ctg}\ BEC\sphericalangle|}{AD\,|\mathrm{ctg}\ AED\sphericalangle|} = \frac{BC}{AD} = \frac{F_1G}{GF_3}.$$

Ezek szerint az M_2EM_4 és F_1GF_3 háromszögben az E-nél, ill. G-nél levő szög egyenlő, és egyenlő a szöget bezáró oldalak aránya, tehát a két háromszög hasonló, továbbá körüljárásuk is megegyező (ellentétes a négyszög körüljárásával). Ezzel állításainkat igazoltuk.

Megjegyzés. A bemutatott ötletes megoldás utal egyben arra is, hogy a hasonlóság belátása óvatosságot igényel: nem elegendő arra hivatkozni, hogy az EM_2, EM_4 magasságok merőlegesek a megfelelő oldalakra. Ez fennállna arra a háromszögre is, amely pl. F_1-nek a két átló felezőpontjaival való összekötésével keletkeznék, az F_1-ből induló oldalak aránya is $BC : AD$ volna, mégsem kapnánk M_2EM_4-hez hasonló háromszöget. Másrészt a bizonyítandó merőlegességre való következtetéshez szükséges volt a körüljárási irány megvizsgálása is. Ezeken a pontokon egy beküldött megoldás sem volt kifogástalan.

További elemzést igényelne annak belátása, hogy ez a gondolatmenet hogyan szolgáltatja a bizonyítandó állítást, ha a négyszög nem konvex.

III. megoldás. A pont körre vonatkozó hatványa fogalmának, valamint a két kör hatványvonalára vonatkozó tételnek[2] felhasználásával az állítást így bizonyíthatjuk. Tekintsük az AB, BC, CD, DA oldal, mint átmérő fölé írt k_i Thalész-kört, legyen a középpont rendre F_i ($i = 1, 2, 3, 4$; 1. ábra). Az I. megoldásban szereplő A', B', C', D' pontok mindegyikén kettő megy át e körök közül. — M_1A és M_1B a k_1 kör két szelője, ezért

$$M_1A \cdot M_1A' = M_1B \cdot M_1B',$$

a két oldal közös értéke az M_1 pont hatványa a k_1 körre. A bal oldal egyszersmind M_1 hatványa k_4-re, a jobb oldal pedig k_2-re, egyenlőségük miatt M_1 rajta van k_4 és k_2 hatványvonalán. Hasonlóan k_3-ból

$$M_3C \cdot M_3C' = M_3D \cdot M_3D',$$

eszerint M_3-nak is egyenlő a k_4-re és k_2-re vonatkozó hatványa, ennélfogva az M_1M_3 egyenes a k_4, k_2 körpár hatványvonala, és így merőleges e körök centrálisára, az F_4F_2 egyenesre. – A II. megoldásban láttuk, hogy $F_4F_2 \| S_4S_2$, így valóban $M_1M_3 \perp S_2S_4$.

[2]Lásd pl. *Gallai T.–Hódi E.–Péter R.–Szabó P.–Tolnai J.:* Matematika az ált, gimn. III. o. számára, 12. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1962) 194-200. o.

Megjegyzés. Ez a megoldás mutatja, hogy az állítás konkáv és hurkolt négyszögre is érvényes.

IV. megoldás. Helyezzünk derékszögű koordinátarendszert az ábrára E-vel mint origóval, legyen az X-tengely az AC egyenes, $\operatorname{tg}\varepsilon = m$, és a csúcsok koordinátái: $A(a,0)$, $C(c,0)$, $B(b,mb)$, $D(d,md)$, ahol $a \neq c$, és $b \neq d$, mert A és C, valamint B és D különböző pontok, továbbá $m \neq 0$, véges szám, mert $\varepsilon \neq 90^\circ$.

A H_1 háromszög B-ből és A-ból húzott magasságának

$$x = b, \quad \text{ill.} \quad y = -\frac{1}{m}\,(x-a)$$

egyenletéből M_1 metszéspontjuk koordinátái: $M_1\big(b,\ (a-b)/m\big)$. Hasonlóan, a és b helyére c-t, ill. d-t írva $M_3\big(d,\ (c-d)/m\big)$, ezek szerint az M_1M_3 egyenes iránytényezője

$$\frac{a-b-c+d}{m(b-d)}. \tag{1}$$

H_2 és H_4 súlypontjának koordinátái: $S_2\big[(b+c)/3, mb/3\big]$, ill. $S_4\big[(a+d)/3, md/3\big]$, ezekből az S_2S_4 egyenes iránytényezője

$$\frac{m(d-b)}{a+d-b-c},$$

ami (1) reciprokának (-1)-szerese. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Amennyiben (1) értéke 0, vagyis M_1M_3 párhuzamos az X-tengellyel, akkor a két ordináta egyenlőségéből $a-b=c-d$, és így $a+d=b+c$, vagyis S_2 és S_4 abszcisszái egyenlők, S_2S_4 merőleges az X-tengelyre, tehát az állítás ekkor is igaz.

Kalmár Tibor (Esztergom, Temesvári Pelbárt g.)

Megjegyzés. Ez a bizonyítás is mutatja, hogy az állítás nem konvex négyszögre is igaz. Ha ugyanis pl. a, b, c pozitívok, és d negatív, akkor az $ABCD$ négyszög konkáv, ha pedig a d is pozitív, akkor hurkolt.