

Jelöljük (1) és (2) jobb oldalát A -val, ill. B -vel, távolítsuk el a nevezőket és gyűjtsük egy oldalra az y -t tartalmazó tagokat:

$$(3) \quad (Ax - 1)y = A - x, \quad (1 - Bx)y = B - x.$$

Az első jobb oldal $1 - Bx$ -szerese a másodiknak $Ax - 1$ -szeresével egyenlő. Az így adódó egyenletet a következő alakra rendezhetjük:

$$(4) \quad (A + B)x^2 - 2(1 + AB)x + A + B = 0.$$

Innen, amennyiben $A + B \neq 0$, az egyenletet kielégítő x csak

$$x = \{AB + 1 \pm \sqrt{(1 + AB)^2 - (A + B)^2}\} / (A + B)$$

lehet. A diszkriminánst átalakítva és az eredeti paraméterekkel kifejezve:

$$\begin{aligned} (1 + AB)^2 - (A + B)^2 &= (1 - A^2)(1 - B^2) = \\ &= (1 + A)(1 - A)(1 + B)(1 - B) = \\ &= \frac{(1 + a)^2}{1 + a^2} \cdot \frac{(1 - a)^2}{1 + a^2} \cdot \frac{(1 + b)^2}{1 + b^2} \cdot \frac{(1 - b)^2}{1 + b^2} = \left(\frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{(1 + a^2)(1 + b^2)} \right), \end{aligned}$$

tehát mindig valós megoldást kapunk. Mivel még

$$(5) \quad A + B = \frac{2(a + b)(1 + ab)}{(1 + a^2)(1 + b^2)},$$

azért az egyenlet egyik gyöke, ha $A + B \neq 0$ (azaz $a + b \neq 0$, $ab \neq -1$)

$$x_1 = \frac{4ab + (1 + a^2)(1 + b^2) + (1 - a^2)(1 - b^2)}{(1 + a^2)(1 + b^2)} \cdot \frac{2(a + b)(ab + 1)}{(1 + a^2)(1 + b^2)} = \frac{ab + 1}{a + b}.$$

Mivel (4)-ben az első és utolsó együtttható egyenlő, s így $x_1 x_2 = 1$, azért $x_2 = 1/x_1$. Most már y -t pl. (3) első egyenletéből számíthatjuk, ha $Ax_1 \neq 1$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{A - x_1}{Ax_1 - 1} = \frac{2a(a + b) - (ab + 1)(1 + a^2)}{2a(ab + 1) - (1 + a^2)(a + b)} = \frac{(a^2 - 1)(ab - 1)}{(a^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab - 1}{a - b}, \\ y_2 &= \frac{A - 1/x_1}{A/x_1 - 1} = \frac{Ax_1 - 1}{A - x_1} = \frac{1}{y_1}. \end{aligned}$$

Összefüggéseink arra az esetre érvényesek, ha $a \neq b$ és $a^2 \neq 1$, továbbá ha $y_1 \neq 0$. Ha $Ax_1 = 1$, de $Bx_1 \neq 1$, akkor (3) második egyenletéből ugyanezen y -értékek adódnak, feltéve, hogy $a \neq b$ és $b^2 \neq 1$. Ax_1 és Bx_1 csak akkor lesz egyszerre 1, ha $A = B$, azaz, mivel

$$(6) \quad A - B = \frac{2(a - b)(1 - ab)}{(1 + a^2)(1 + b^2)},$$

tehát ha $a = b$ vagy $ab = 1$. Mint látjuk, ezekben az esetekben fenn is áll mindig $A = B$.

Azt nyertük tehát, hogy ha $A + B \neq 0$ és $A - B \neq 0$, továbbá a^2 és b^2 egyike nem 1, akkor csak a fenti x_1 ; y_1 és x_2 , y_2 lehet az egyenletrendszer megoldása. (Az (5) és (6) alapján x_1 és y_1 nem 0, és így x_2 , y_2 létezik.) Behelyettesítve (1) és (2)-be, mivel

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= \frac{2a(1 - b^2)}{a^2 - b^2}, & 1 - x_1 y_1 &= \frac{(1 + a^2)(1 - b^2)}{a^2 - b^2}, \\ x_1 + y_1 &= \frac{2b(a^2 - 1)}{a^2 - b^2}, & 1 + x_1 y_1 &= \frac{(1 + b^2)(a^2 - 1)}{a^2 - b^2}, \end{aligned}$$

azért x_1 , y_1 megoldása az egyenletrendszernek, ha sem a^2 , sem b^2 nem 1. Mivel továbbá

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - y_2}{1 - x_2 y_2} &= \frac{1/x_1 - 1/y_1}{1 - 1/x_1 y_1} = \frac{y_1 - x_1}{x_1 y_1 - 1} \quad \text{és} \\ \frac{x_2 + y_2}{1 + x_2 y_2} &= \frac{1/x_1 + 1/y_1}{1 + 1/x_1 y_1} = \frac{y_1 + x_1}{x_1 y_1 + 1}, \end{aligned}$$

így a fenti feltételek mellett x_2 , y_2 is megoldás.

A kivételes esetek vizsgálatára jól használhatók a (3) alatti egyenletek összeadásával és kivonásával keletkező egyenletek:

$$(7) \quad 2x = A + B - (A - B)xy, \quad 2y = (A + B)xy - (A - B).$$

Ha $A + B = 0$, akkor innen $y = -A$, $x = A^2x$; tehát ha $A^2 \neq 1$, $x = 0$; - ha pedig $A^2 = 1$, akkor x tetszés szerinti szám lehet, amire $xy \neq \pm 1$, tehát x nem lehet ± 1 . Ezek az értékpárok ki is elégítik az egyenletrendszeret.

Hasonlóan ha $A - B = 0$, akkor $x = A$, és ha $A \neq 1$, $y = 0$; - ha pedig $A^2 = 1$, y bármely ± 1 -től különböző szám lehet, és ezek ismét megoldását szolgáltatják az egyenletrendszernek.

Vizsgáljuk még az $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ feltételeket. Ha pl. $a^2 = 1$, akkor $A = a = \pm 1$.

A hátra levő esetekben, amikor sem $A + B$, sem $A - B$ nem 0, nem lehet $a^2 = b^2 = 1$, mert ebből az éppen mondottak szerint $A + B = 0$ vagy $A - B = 0$ következik.

Legyen most $a^2 = 1$, $b^2 \neq 1$. Mivel most csak a fent nyert x_1, y_1 és x_2, y_2 értékpár lehet az egyenletrendszer megoldása, így

$$x_1 = \frac{ab + 1}{a + b} = \frac{a(ab + 1)}{1 + ab} = a$$

(a törtnek van értelme, mivel $a^2b^2 = b^2 \neq 1$) és

$$y_1 = \frac{ab - 1}{a - b} = \frac{a(ab - 1)}{1 - ab} = -a,$$

továbbá $x_2 = a$, $y_2 = -a$, mert $a^2 = 1$. Ebből $x_1 + y_1 = 1 + x_1y_1 = x_2 + y_2 = 1 + x_2y_2 = 0$, s így a (2) egyenlet bal oldala értelmetlenné válik. Ebben az esetben tehát nincs megoldása az egyenletrendszernek. Ugyanígy az $a^2 \neq 1$, $b^2 = 1$ esetben sem, mert akkor $x_1 = b = x_2 = y_1 = y_2$, s így az (1) egyenlet bal oldala válik értelmetlenné.

Végül, mikor lesz az x_1, y_1 és x_2, y_2 megoldaspár azonos? Mivel

$$x_1 - x_2 = x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{(ab + 1)^2 - (a + b)^2}{(ab + 1)(a + b)} = \frac{(a + 1)(b + 1)(a - 1)(b - 1)}{(ab + 1)(a + b)},$$

tehát ez csak akkor következhet be, ha a és b közül az egyik 1 vagy -1 . Ez azonban a kivételes esetek közé tartozik. Ha a és b másika is 1 vagy -1 , akkor vagy $A + B = 0$, vagy $A - B = 0$; ha a másik nem 1 vagy -1 , akkor pedig nincs megoldása az egyenletrendszernek.

Mivel $1 \pm A = (1 \pm a)^2 / (1 + a^2)$, s így A , ill. B akkor és csak akkor ± 1 , ha a , ill. b értéke ugyanennyi, így (5)-öt és (6)-ot is figyelembe véve eredményeink így foglalhatók össze: ha a különbözik $\pm b$ -től és $\pm 1/b$ -től, és mindkettő különbözik ± 1 -től, akkor az egyenletrendszernek két különböző megoldása van: a fenti x_1, y_1 és x_2, y_2 értékpár.

Ha a és b egyike ± 1 , a másik ettől különböző érték, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Ha a egyenlő b -vel, vagy a reciprokával, de ± 1 -től különböző, akkor $x = 2a / (1 + a^2)$, $y = 0$; ha a egyenlő b -vel vagy $-1/b$ -vel, de nem ± 1 , akkor $x = 0$, $y = 2b / (1 + b^2)$.

Ha $a = b = \pm 1$, akkor $x = a$, y bármely ± 1 -től különböző szám lehet, ha pedig $a = -b = \pm 1$, akkor x tetszőleges szám, csak nem ± 1 , és $y = -a$.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. Gyak. G.)