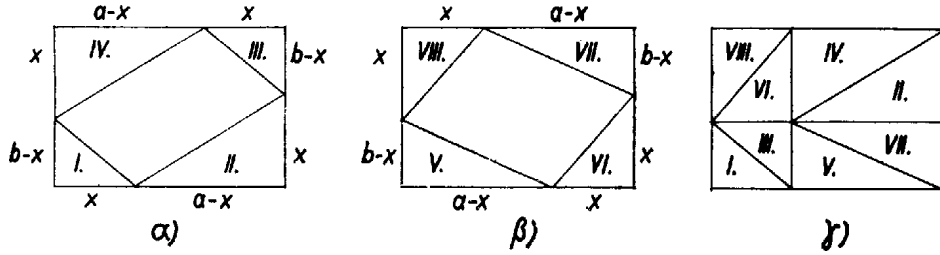


I. Legyenek a téglalap oldalai a és b , ahol $a \geq b (> 0)$, az oldalakra felmért szakasz hossza x , így a keletkezett négyszögek területét mint x függvényét a

$$(1) \quad 0 < x \leq b$$

intervallumban kell vizsgálnunk. A felmért szakaszok végpontjait az oldalak sorrendjében összekötve, a téglalapról derékszögű háromszögeket vágunk le, közülük mindkét mód esetében $2 - 2$ egybevágó (az ábra α , ill. β része). A területek x -nek másodfokú függvényei, mindjárt teljes négyzetté kiegészítéssel

$$\begin{aligned} t_1 &= ab - x(b-x) - (a-x)x = 2x^2 - (a+b)x + ab = \\ &= 2 \left(x - \frac{a+b}{4} \right)^2 + ab - \left(\frac{a+b}{4} \right)^2, \\ t_2 &= ab - (a-x)(b-x) - x^2 = -2x^2 + (a+b)x = \\ &= -2 \left(x - \frac{a+b}{4} \right)^2 + \left(\frac{a+b}{4} \right)^2. \end{aligned}$$



Vegyük észre mindjárt, hogy $t_1 + t_2 = ab$, azaz a két idom területének összege egyenlő az adott téglalap területével, egyikük növekedésével a másik csökken, így a két kérdésre a választ egy csapásra adhatjuk meg. (Másképpen a lemez feldarabolási tervét mindkét módon elkészítve a levágott 8 háromszög együttes területe is ab , ezt mutatja be átdarabolással az ábra γ része.)

t_1 -nek az x -től függő tagja nem negatív, így legkisebb értékét akkor veszi fel, ha ez a tag 0, vagyis

$$x_0 = \frac{a+b}{4} \quad \text{esetén} \quad t_{1\min} = ab - \left(\frac{a+b}{4} \right)^2,$$

amennyiben x_0 a mondott intervallumba esik, vagyis ha

$$(2) \quad \frac{a+b}{4} \leq b, \quad b \geq \frac{a}{3},$$

egyelőre ezt az esetet tekintjük. A fentiek szerint ugyanezen feltételek mellett

$$t_{2\max} = \left(\frac{a+b}{4} \right)^2.$$

(t_1 -től függetlenül is látható, hogy így t_2 változó tagja 0, különben pedig negatív.) Ha $a = b$, akkor $x_0 = a/2$.

x -et x_0 -tól akár lefelé, akár fölfelé távolítva t_1 növekszik, és legnagyobb értékét ott veszi fel, ahol az $|x - x_0|$ eltérés a legnagyobb. Lefelé nagyobb távolságra távolodhatunk x_0 -tól, mint fölfelé, ugyanis az x_0 -lal kettévágott (1) intervallum első és második része hosszainak különbsége

$$(x_0 - 0) - (b - x_0) = 2x_0 - b = \frac{a-b}{2} \geq 0.$$

Eszerint t_1 legnagyobb (és t_2 legkisebb) értéke $x = 0$ -nál adódnék: $t_1 = ab$, ill. $t_2 = 0$ (t_2 elfajul az átlószakasszá), az $x = 0$ értéket viszont (1)-ben kizártuk. Eszerint a (2) esetben t_1 nem vesz fel legnagyobb és t_2 nem vesz fel legkisebb értékét.

$b < a/3$, $a > 3b$ esetén a t_1 -et minden x -re ábrázoló parabola alul elhelyezkedő csúcsának (és a t_2 -t ábrázoló parabola fönt elhelyezkedő csúcsának közös) x_0 abszcisszája jobbra esik az (1) intervallumtól, mert

$$x_0 = \frac{a+b}{4} > \frac{3b+b}{4} = b.$$

Ezért t_1 -et (1)-ben a parabola süllyedő ágának egy íve ábrázolja, így t_1 az (1) jobb végpontjában veszi fel legkisebb értékét:

$$x = b \quad \text{esetén} \quad t'_{1\min} = b^2, \quad \text{és} \quad t'_{2\max} = ab - b^2,$$

másrészt t_1 ugyanúgy nem vesz fel legnagyobb értéket és t_2 sem vesz fel legkisebbet, mint az előbbi esetben.

II. A $t_1 = t_2$ követelmény a fentiek szerint akkor teljesül, ha

$$4x^2 - 2(a+b)x + ab = 0, \quad \text{vagyis ha } x_1 = a/2, \quad x_2 = b/2.$$

Az utóbbi érték mindig felmérhető a lemezre, az előbbi csak $a/2 \leq b$, azaz $b \leq a \leq 2b$ esetén. Mindkét esetben a két mód szerinti felmérés nemcsak egyenlő területű, hanem egyszersmind egybevágó négyszögekre vezet.

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)