

I. Legyen az ABC háromszögben $AB = AC = 1$, $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, az alap és az AC szár felezőpontja A_0 , ill. B_0 , és az utóbbi vetülete BC -n D . Ekkor $BC = 2 \cos \beta$, $AA_0 = s_a$ azonos az A -ból húzott magassággal: $s_a = \sin \beta$, másrészt a BB_0D derékszögű háromszögben $BD = 3BC/4$, $B_0D = s_a/2$, így

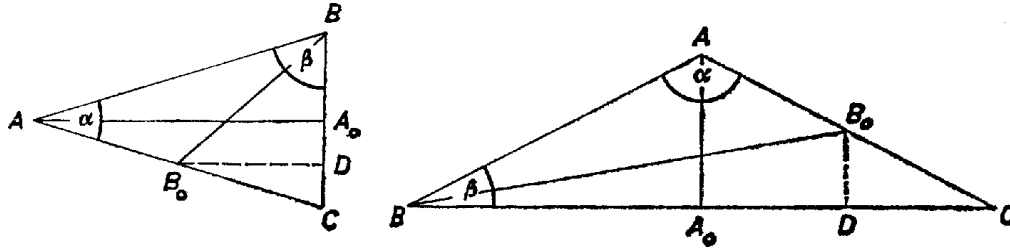
$$2s_b = \sqrt{9 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta} = \sqrt{1 + 8 \cos^2 \beta} = \sqrt{5 + 4 \cos 2\beta},$$

$$S = s_a + 2s_b = \sin \beta + \sqrt{5 + 4 \cos 2\beta},$$

másrészt a háromszög kerülete $2s = a + b + c = 2(1 + \cos \beta)$.

$\alpha = 8^\circ$ esetén $\beta = 86^\circ$, $S \approx 2,036$, $2s \approx 2,140$, így a keresett arány $(2s - S) : 2s \approx 0,0574 \approx 1/17,5$, vagyis S a felső korlátnak közelítőleg a 17-ed részével marad alatta.

$\beta = 8^\circ$ esetén $S \approx 3,113$, az alsó korlát $3s/2 \approx 2,985$, a keresett arány $(S - 3s/2) : (3s/2) \approx 0,0428 \approx 1/23$, vagyis S az alsó korlátot annak kb. 23-ad részével haladja meg.



II. A keresett első egyenlő szárú háromszög-alak céljára megfelel minden olyan β hegyesszög, amellyel szerkesztett háromszögben S nagyobb a kerület $29/30$ részénél, vagy éppen egyenlő vele, azaz

$$(1) \quad \sin \beta + \sqrt{1 + 8 \cos^2 \beta} \geq \frac{29}{15}(1 + \cos \beta).$$

A bal oldal első tagja AA_0 , nagyobb az AB és BA_0 oldalak különbségénél, ami $1 - \cos \beta$, második tagja pedig nagyobb 1-nél, tehát a bal oldal nagyobb, mint $2 - \cos \beta$. Ha találunk olyan β hegyesszöget, amely mellett ez a kifejezés nagyobb (1) jobb oldalánál, vagy egyenlő vele, arra (1) is teljesül. Mármint

$$2 - \cos \beta \geq \frac{29}{15}(1 + \cos \beta)$$

teljesül, ha $\cos \beta \leq 1/44$, azaz ha $\beta \geq 88,7^\circ$. Például $\beta = 89^\circ$, $\alpha = 2^\circ$ esetén – a táblázati értékek kikeresésekor a tagok alsó közelítő értékét felhasználva –

$$S = \sin 89^\circ + \sqrt{5 + 4 \cos 178^\circ} > 0,9997 + \sqrt{5 - 4 \cdot 0,9995} > \\ > 0,9997 + 1,0009 = 2,0006,$$

másrészt felkerekítéssel

$$2s = 2(1 + \cos 89^\circ) < 2 \cdot 1,0176 = 2,0352,$$

így eltérésük kisebb mint 0,0346, ami maga is kisebb, mint a felső korlát $1/50$ része.

A keresett második alak céljára megfelel minden olyan β hegyesszög, amellyel szerkesztett háromszögben S kisebb az alsó korlát $31/30$ -szorosánál, vagy egyenlő vele, vagyis (a négyzetgyökök újabb átalakításával)

$$(2) \quad S = \sin \beta + \sqrt{9 - 8 \sin^2 \beta} \leq \frac{31}{30} \cdot \frac{3}{2}(1 + \cos \beta).$$

A bal oldal kisebb, mint $\sin \beta + 3$, a jobb oldalon $\cos \beta = BA_0 > BA - AA_0 = 1 - \sin \beta$. Ha (2)-be ezeket beírva, a kapott egyenlőtlenséget valamely β hegyesszög teljesíti, arra (2) is teljesül. Mármint

$$\sin \beta + 3 \leq \frac{31}{20}(2 - \sin \beta)$$

teljesül, ha $\sin \beta \leq 2/51$, ehhez pedig elegendő, ha $\beta \leq 2,2^\circ$. Például $\beta = 2^\circ$, $\alpha = 176^\circ$ esetén felkerekítésekkel $S = \sin 2^\circ + \sqrt{5 + 4 \cos 4^\circ} < 0,0350 + \sqrt{5 + 4 \cdot 0,9977} < 0,0350 + 2,9985 = 3,0335$, és lekerekítéssel

$$3s/2 = 3(1 + \cos 2^\circ)/2 > 3 \cdot 1,9993/2 > 2,9989,$$

így eltérésük kisebb, mint 0,0346, ami maga is kisebb, mint az alsó korlát $1/80$ része.

Megjegyzés. A II. részben látott eljárásoktól kissé eltérően kapunk megfelelő háromszög-alakokat a következő megfontolásokkal. Legyen a háromszög alapja $2x$. Az első esetben a háromszög-egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával

$$S > s_a + 2 \cdot B_0D = 2s_a > 2(AB - BA_0) = 2(1 - x),$$

így

$$\frac{S}{2s} > \frac{1-x}{1+x} \geq \frac{29}{30}$$

teljesül, mihamint $x \leq 1/59$, azaz $\cos \beta \leq 0,0169$, $\beta \geq 89,1^\circ$. (A kapott korlát azért szűkebb, mert fent $2s_b$ helyére 1-et írtunk.)

A második esetben

$$S = s_a + 2s_b < s_a + 2(BD + DB_0) = 2s_a + 3x,$$

és megfelel egy háromszög-alak, ha ezt az alsó korlátnál $31/30$ -szor nagyobb számból kivonva nem negatív számot kapunk:

$$\frac{31}{30} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2(1+x) - (2s_a + 3x) = \frac{1}{20}(31 - 40s_a - 29x) \geq 0.$$

A zárójel harmadik tagjában $x = BA_0$ helyére a nagyobb $BA = 1$ -et írva a különbség helyére kisebb szám lép, de még az is pozitívá tehető, mégpedig $2 - 40s_a \geq 0$, ha $s_a \leq 1/20$, azaz $\sin \beta \leq 0,05$, $\beta \leq 2,8^\circ$.