

A kifejezés nincs értelmezve, ha $u(u-2v) < 0$,

tehát vagy ha $u > 0$, $u-2v < 0$, azaz $2v > u > 0$,
vagy ha $u < 0$, $u-2v > 0$, azaz $2v < u < 0$.

Máskor

$$\begin{aligned} u^2 - 2uv + 3v^2 + 2v\sqrt{3u(u-2v)} &= \\ = u(u-2v) + 2\sqrt{3}v\sqrt{u(u-2v)} + (\sqrt{3}v)^2 &= \\ = (\sqrt{u(u-2v)} + \sqrt{3}v)^2 \end{aligned}$$

tehát a külső gyökjel alatt nem áll negatív szám: a keresett gyökmennyiség pedig megegyezik

$$|\sqrt{u(u-2v)} + \sqrt{3}v| \text{-vel.}$$

Itt az abszolút érték jele elhagyható, kivéve ha v negatív és

$$-\sqrt{3}v = \sqrt{3} \cdot |v| > \sqrt{u(u-2v)}.$$

Mivel mindkét oldalon pozitív szám áll, ez ugyanakkor teljesül, amikor a négyzetre emeléssel keletkező

$$3v^2 > u(u-2v), \quad 4v^2 > u^2 - 2uv + v^2 = (u-v)^2$$

egyenlőtlenség. Ez viszont akkor teljesül, ha

$$|u-v| < 2|v| = -2v,$$

azaz ha

$$2v < u-v < -2v, \quad 3v < u < -v.$$

Ebből $u < 0$ esetén a $2v < u$ esetben a kifejezés nincs értelmezve, tehát csak a

$$3v < u \leq 2v, \quad 0 \leq u < -v$$

esetek maradnak. Ezek szerint

$$\begin{aligned} &\sqrt{u^2 - 2uv + 3v^2 + 2v\sqrt{3u(u-2v)}} = \\ &= \begin{cases} \sqrt{u(u-2v)} + \sqrt{3}v, & \text{ha } 0 \leq v \leq \frac{u}{2}, \text{ vagy } u \leq 0 \leq v, \\ & \text{vagy } u \leq 3v < 0, \text{ vagy } 0 < -v \leq u; \\ -\sqrt{3}v - \sqrt{u(u-2v)} = \sqrt{3}|v| - \sqrt{u(u+2|v|)}, & \\ & \text{ha } v < 0 \text{ és } 3v < u \leq 2v < 0, \text{ vagy } 0 \leq u < -v; \\ \text{nincs értelme, ha } 0 < u < 2v \text{ vagy } 2v < u < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Bóta Károly (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A pusztá átalakításhoz eljutunk az

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

azonossággal is. A bal oldal akkor azonos (1)-gyel, ha

$$A = u^2 - 2uv + 3v^2 = u(u-2v) + 3v^2, \quad B = 12uv^2(u-2v).$$

Ezekkel a jobb oldal belső gyökjele egyszerűen alakul:

$$\begin{aligned} A^2 - B &= u^2(u-2v)^2 - 6uv^2(u-2v) + 9v^4 = \\ &= [u(u-2v) - 3v^2]^2, \end{aligned}$$

vagyis az A utóbbi alakjában szereplő tagok különbségének négyzete.

Székelly Gábor (Budapest, Madách I. g. III. o. t.)