$$\begin{array}{cccc} . & . & 12 & . \\ 144 & . & . & . \\ . & . & . & 81 \\ . & 288 & . & . \end{array}$$

I. megoldás. Tekintsük egyelőre csak a szélső sorokon és oszlopokon álló számokat. Jelöljük a jobb felső sarokpont helyére írandó számot x-szel, legyen továbbá a mértani sorozat hányadosa az első soron balfelé haladva y, az első oszlopon lefelé haladva z és az alsó soron jobbra haladva u. Ezekkel ábránk így alakul:

$$\begin{array}{cccc} xy^3 & xy^2 & xy & x \\ xy^3z & \cdot & \cdot & xyzu \\ xy^3z^2 & \cdot & \cdot & xy^2z^2u^2 \\ xy^3z^3 & xy^3z^3u & xy^3z^3u^2 & xy^3z^3u^3 \end{array}$$

Az utolsó oszlop közbülső kifejezéseit abból írtuk be, hogy az oszlopon lefelé haladva a kvociens a szélső tagok hányadosának köbgyöke: yzu.

A megadott számokat tekintetbe véve a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$xy = 12, \tag{1}$$

$$xy^3z = 144, \tag{2}$$

$$xy^3z^3u = 288, \tag{3}$$

$$xy^2z^2u^2 = 81, \tag{4}$$

és nyilvánvalóan egyik ismeretlen értéke sem 0.

Osszuk (2)-t (1)-gyel, továbbá (3)-at előbb (2)-vel, majd (4)-gyel, így x mindenütt kiesik:

$$y^2z = 12, \tag{5}$$

$$z^2u = 2, \tag{6}$$

$$\frac{yz}{u} = \frac{32}{9}. \tag{7}$$

(6) és (7) szorzatából kiesik u:

$$yz^3 = \frac{64}{9}. \tag{8}$$

(5)-öt köbreemelve és elosztva (8)-cal, kiesik z:

$$y^5 = 12^3 \cdot 9/64 = 3^5, \qquad y = 3,$$

így pedig (1)-ből, (5)-ből, majd (6)-ból $x = 4$, $z = 4/3$, $u = 9/8$, az utolsó oszlop kvociense pedig $yzu = 9/2$.

A szélső tagokat ismerve a sorozat hányadosa (balról jobbra haladva) a 2. sorban csak $u/y^2 = 1/8$ köbgyöke lehet, vagyis $1/2$, a 3. sorban pedig csak $u^2/y = 27/64$ köbgyöke, $3/4$. A számokat ezeknek megfelelően írva be az ábrába a 2. és 3. oszlopon is mértani sorozatot kapunk, így az ábra kitöltése megfelel az összes követelményeknek.

108	36	12	4
144	72	36	18
192	144	108	81
256	288	324	364,5

Bak Zsuzsanna (Ráckeve, Ady E. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Jelöljük a jobb felső sarokban álló számot x-szel. Ekkor az első sorban jobbról balra haladva a hányados $12/x$, az utolsó oszlopban lefelé haladva pedig a hányados négyzetével szorozva jutunk 81-hez, tehát 81-gyel együtt z is pozitív, és itt a hányados $\pm 9/\sqrt{x}$. Így a bal felső sarokban $12^3/x^2$, a jobb alsó sarokban $\pm 9^3/\sqrt{x}$ áll.

Az előzőkhöz hasonlóan számolva az első oszlopban, ha fölülről lefelé haladunk, a hányados $x^2/12$, az utolsó sorban pedig, ha jobbról haladunk bal felé, a hányados négyzetével szorozva jutunk 288-hoz, így a hányados

$$\sqrt{288/(\pm 9^3\sqrt{x})} = 4\sqrt[4]{4x}/9,$$

továbbá látjuk, hogy csak akkor áll a gyökjel alatt pozitív szám, ha az utolsó oszlop hányadosa pozitív.

Számítsuk ki a bal alsó sarokban álló számot mint egyrészt az első oszlopban, másrészt az utolsó sorban álló mértani sorozat negyedik elemét, így ugyanazt a számot kell kapnunk, tehát kell hogy teljesüljön:

$$\frac{12^3}{x^2}\cdot\left(\frac{x^2}{12}\right)^3=\frac{9^3}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{4\sqrt{4x}}{9}\right)^3,\text{ azaz}$$

$$x^4=4^3(\sqrt[4]{4})^3\sqrt[4]{x}.$$

Innen

$$x^{15/4}=4^{15/4},\quad x=4.$$

Ennek ismeretében a fenti gondolatmenet alapján kitölthetjük először a táblázat szélén álló sorokat és oszlopokat, majd a középső két sort is és a fenti táblázatot kapjuk. Azt találjuk, hogy a középső két oszlopban is mértani sorozat áll, így az ábra kitöltése megfelel az összes követelményeknek.

Sövényházy Mária (Szeged, Ságvári E. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. **1.** Nem véletlen, hogy számpéldánkban a középső oszlopokon is mértani sorozatok adódnak. Mint láttuk, a 2. és a 3. sorban csak $u^{1/3}\cdot y^{-}2/3$, ill. $u^{2/3}\cdot y^{-1/3}$ lehet a hányados (balról jobbra haladva), ha pedig a középső négy számot ennek alapján írjuk be:

$$\begin{array}{cc} xy^{7/3}zu^{1/3} & xy^{5/3}zu^{2/3} \\ xy^{8/3}z^2u^{2/3} & xy^{7/3}z^2u^{4/3} \end{array}$$

a 2. és a 3. oszlopban (lefelé haladva) $y^{1/3}$, ill. $y^{2/3}zu^{2/3}$ hányados adódik.

2. Néhányan abból a feltételezésből indultak ki, hogy az ábra minden pontja helyére egész szám kerül, még hozzá 2 és 3 valamilyen (nem negativ) kitevős hatványának szorzata. Ezeket 2 pontra értékeltük.

3. Néhányan ezzel vélték egyszerűsíteni a feladatot: mértani sorozat egymás utáni tagjainak logaritmusát véve számtani sorozatot kapunk. – Ehhez – minthogy logaritmust csak a pozitív számokhoz rendeltünk hozzá – előzetesen bizonyítani kellett volna, hogy mindegyik szám pozitív lesz, vagyis mindegyik mértani sorozat hányadosa is pozitív.