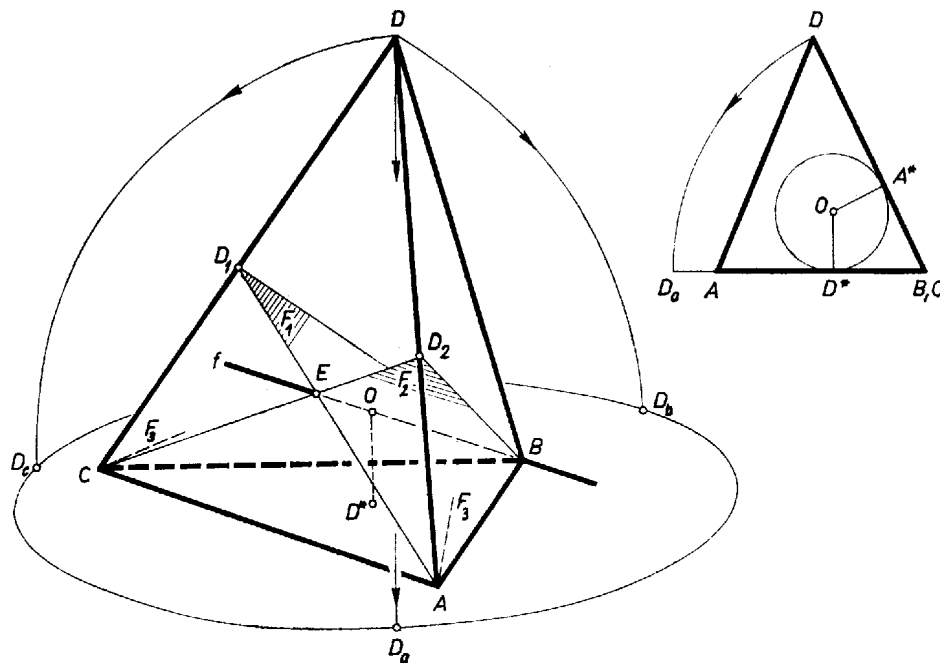




I. Azt kell megmutatnunk, hogy van H belsejében olyan O pont, amely mind a négy laptól egyenlő távolságra van. A H belsejében és az ABC és ABD lapsíkoktól egyenlő távolságra levő pontok az AB élnél levő (belső) lapszög F_1 felezősíkján vannak (és F_1 minden pontja egyenlő távolságra van a két lapsíktól). Hasonlóan a BCA és BCD lapoktól egyenlő távolságra levő H -beli pontok a BC élnél levő (belső) lapszög F_2 felezősíkjának H -beli pontjai. Így H -nak a B -ben összefutó három lapjától egyenlő távolságra levő pontok F_1 és F_2 metszésvonalán, f -en vannak. (A metszésvonal létezik, mert a két síknak van közös pontja, ti. B , másrészt nem esnek egybe, mert van F_1 -nek olyan pontja, amely nincs rajta F_2 -n, ilyen pl. A .)

Megmutatjuk, hogy f a CAD lapsíkot a CAD háromszög belsejében metszi. F_1 elválasztja C -t D -től, ezért a CD élt egy D_1 belső pontjában metszi, így F_1 -nek a CAD lapsíkkal közös egyenese AD_1 . Hasonlóan CAD és F_2 közös egyenese CD_2 , ahol D_2 az AD élnél belső pontja. Ezek szerint AD_1 és CD_2 egy az ACD háromszög belsejében levő E pontban metszik egymást, és E az f -nek pontja, mert F_1 -nek és F_2 -nek közös pontja.

Végül a CAB és CAD lapsíkoktól egyenlő távolságban levő H -beli pontok a két lap szögének F_3 felezősíkján vannak. f metszi F_3 -at, mert B és E pontjai F_3 két oldalán vannak, így az O metszéspont a BE szakaszon, tehát H belsejében van.

O a D -ben összefutó lapsíkok mindegyikétől ugyanakkora r távolságra van, mint az ABC lapsíktól, ennél fogva az O körül r sugárral írt G gömb H -nak mind a négy lapsíkját érinti, éspedig belülről. Ezzel az első állítást bebizonyítottuk.

II. Legyen G érintési pontja a BCD lapon A^* , az ABC lapon D^* ; az utóbbit kell megszerkesztenünk. Az érintés miatt A^* és D^* egyenlő távolságra vannak a BC éltől, és a belőlük BC -re állított merőlegesek a BC élen metszik egymást. Ugyanis BC , mint a BCD sík egyenese, merőleges a síkra merőlegesen álló OA^* egyenesre, ugyanígy OD^* -ra is, tehát merőleges az OA^*D^* síkra, ez a sík metszi ki BC -ből az említett pontot. Ezért ha D -vel együtt A^* -ot is az ABC síkba forgatjuk, A^* a D^* -ba jut, így $D_a D^* = DA^*$.

Legyen G érintési pontja a CAD és ABD oldallapon B^* , ill. C^* ; ezek D -vel együtt CA , ill. AB körül az ABC síkba forgatva ugyancsak D^* -ba jutnak, tehát $D_b D^* = DB^*$, és $D_c D^* = DC^*$. Ámde DA^* , DB^* és DC^* a G -hez D -ből húzott érintőszakaszok, tehát egyenlők, ezért

$$D_a D^* = D_b D^* = D_c D^*,$$

így D^* valóban a leforgatásokkal kapott D_a , D_b , D_c pontokon áthaladó kör középpontja.

Laczkovich Miklós (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A következő meggondolásban kissé másképpen adódik, hogy A^* -nak a fenti forgatás utáni A_a^* -helyzete azonos D^* -gal. $BA^* = BD^*$ és $CA^* = CD^*$, mint G -hez B -ből, ill. C -ből húzott érintőszakaszok. Így $BCA_a^* \triangle \simeq BCA^* \triangle \simeq BCD^* \triangle$, mert a forgatás a méreteket nem változtatja, ill. mert az oldalak páronként egyenlők.