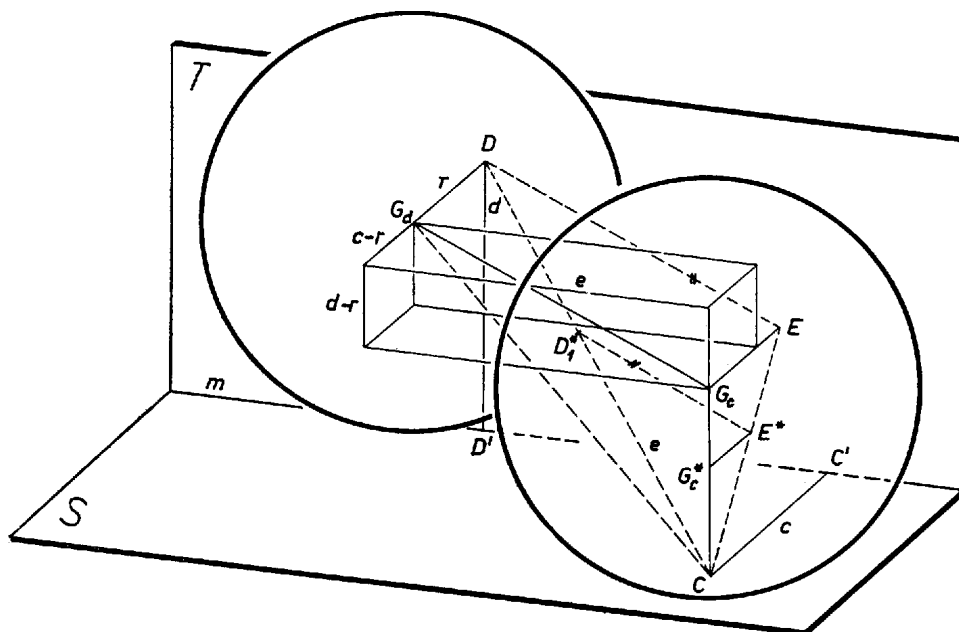


I. megoldás. A gömböket megszerkesztettnek tekintjük, ha meg tudjuk szerkeszteni sugaruk hosszát. Ekkor ugyanis a sugarat az érintési pontban a megfelelő síkra állított merőlegesre – kellő irányban – felmérve megkapjuk a gömb középpontját.



1. ábra

A gömbök r sugarát számítással állapítjuk meg. Keressünk olyan megoldást, melyben a két gömb G_c , ill. G_d középpontja abban a tégelyben van, amelyet síkjainak az érintési pontokat tartalmazó felsíkjai határolnak. (Azt a kivételes esetet, ha C és D között van az m -en fekvő pont, később tekintjük.) Fekteszünk G_c -n és G_d -n át 3–3 olyan síkot, melyek egyike S -sel, másika T -vel párhuzamos, harmadikuk pedig merőleges m -re (1. ábra). Ez a 6 sík téglatestet határol, melyben a $G_c G_d$ szakasz testátló – és hossza a gömbök érintkezése folytán $2r$ –, egy csúcsba összefutó 3 él közül az m -mel párhuzamosnak hossza e , az S -re, ill. T -re merőleges él hossza pedig $d-r$, ill. $c-r$ abszolút értéke. (A c , d , e méreteket pozitívnak vesszük, mert a feladatban semmiféle irányítás nem szerepel.) Ezekből a testátlóra ismert összefüggés szerint

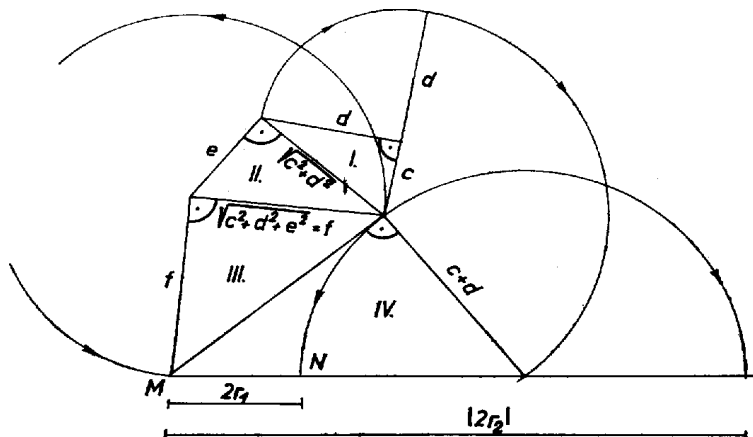
$$(c-r)^2 + (d-r)^2 + e^2 = 4r^2,$$

$$r^2 + (c+d)r - \frac{c^2 + d^2 + e^2}{2} = 0,$$

amiből

$$(1) \quad r = \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{2(c^2 + d^2 + e^2) + (c+d)^2} - (c+d) \right),$$

és ez pl. a Pythagorász-tétel ismételt alkalmazásával megszerkeszthető (2. ábra, az egymás után szerkesztett derékszögű háromszögeket I., II., III., IV. jelöli), a keresett gömbök átmérőjének hossza az MN szakasz, ebből – mint láttuk – a gömbök megszerkeszthetők.



2. ábra

A négyzetgyököket $+$ jellel véve r nyilvánvalóan pozitív. Azonban a negatív r is ad egy megoldást, r negatív volta azt jelenti, hogy a középpontokba C -ből és D -ből a felvett irányokkal ellentétes irányban haladva jutunk el, a két középpont az eddig tekintett térnegyeddel szomszédos két térnegyed egyikében, ill. másikában van. Ebben a megoldásban az S -síkot C -ben érintő gömb átmettse a T síkot, a másik gömb pedig átmettse S -et (az 1. ábra helyzetében az előbbi S alatt van, az utóbbi T mögött), – ugyanis pl. az első gömbnek nincs pontja S fölött, tehát az érintkezési pont csak S alatt lehet. Emiatt nem lehet szó a megoldás elvetéséről, mert pl. az S -et C -ben érintő gömb T -vel való kölcsönös helyzetére nem áll fenn követelmény.

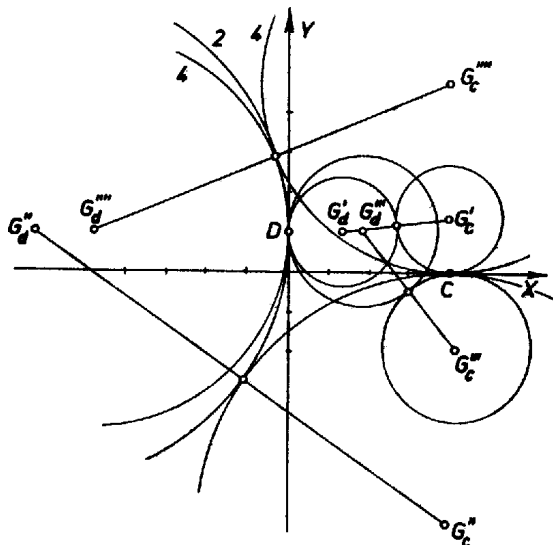
További két megoldást kapunk abból a feltevésből kiindulva, hogy G_d a T -nek azon az oldalán van, mint C , G_c pedig az S -nek D -vel ellentétes oldalán. Így a fenti számításban $|d - r|$ helyére $d + r$ lép, r értékét (1) adja meg, ha d helyére $-d$ -t írunk. A gyökök itt is ellentétes előjelűek, mert szorzatuk, az egyenlet r -et nem tartalmazó tagja, negatív. A pozitív gyökkel kapjuk a fenti helyzetű G_c , G_d középpontokat, a negatív gyököt véve pedig G_c az S fölött, G_d a T mögött áll elő, mindkét megoldásban a gömbök az egyik síkot érintik, a másikat metszik. – Minden lehetőséget figyelembe vettünk, több megoldás nincs.

Előfordulhat, hogy G_c és G_d az első esetben vizsgált térnegyedben vannak, de a gömbök egyike mégis metszi a nem érintett síkot. Ilyen az az eset is, ha pl. $d = 0$, hiszen ekkor minden lehetséges G_d benne van S -ben. Csak abban az esetben nincs megoldás, ha C és D azonos, ekkor $c = d = e = 0$.

Lovász László (Budapest, Fazekas M. Gyak. G. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A pozitív r -re szorítkozva a sugarat az $r(r + c + d) = (c^2 + d^2 + e^2)/2$ egyenletalakból a kör érintőjére ismert tétel alapján is megszerkeszthetjük.

2. A feladat nem írta elő az összes megoldások megkeresését, a teljes megoldást a minél jobb térszemlélet kialakítása érdekében közöltük. Ezt kívánja segíteni a 3. ábra esete is, amelyen $C' \equiv D'$, $e = 0$, C , D , G_c , G_d és az érintkezési pontok benne vannak abban a C' -n átmenő U síkban, amely merőleges m -re, a gömböknek csak az U -ba eső főkörét látjuk; $c = 4$, $d = 1$ egység.



3. ábra

II. megoldás. Tekintsük az S -et C -ben érintő gömb felületén a $G_d D$ -vel megegyező irányú sugár E végpontját. Ekkor $DE = G_d G_c = 2G_c E$, mert a $G_c G_d D E$ négyszög paralelogramma.

Kicsinyítsük az ábrát (a térbeli D , G_c , G_d , E pontrendszer) C -ből mint középpontból. A kicsinyítés arányát folytonosan változtatva a pontok képe rendre a CD , CG_c , CG_d , CE egyenesen mozog, és a $G_c G_d$ szakasz kicsinyített képe mindig 2-szerese CG_c , DG_d és $G_c E$ képének.

Mérjük fel az S -re C -ben állított n merőleges egyenesre – G_c várt helyzetének irányában – egy tetszőleges szerinti r^* szakaszt, legyen a végpont G_c^* ; továbbá G_c^* -ból T -re merőlegesen – a várt $G_d D$ irányban – ugyancsak r^* -ot, a végpont E^* . Írjunk végül kört a CDE^* síkban E^* körül $2r^*$ sugárral, és messe ez a CD egyenest a D_1^* , D_2^* pontokban. Így a C , E^* , D_i^* pontrendszer ($i = 1, 2$) hasonló helyzetű a C , E , D pontrendszerhez, ennél fogva E -t kimetszhetjük a CE^* egyenesből a D -n át $D_i^* E^*$ -gal párhuzamosan vezetett egyenessel. Hasonlóan G_c -t n -ből kimetszi az E -n átmenő T -re merőleges egyenes, végül G_d -t a $G_c E D G_d$ paralelogramma negyedik csúcsa adja, és a keresett gömbök sugara $G_c C = G_c E = G_d D$.

A CG_c^* és $G_c^* E^*$ irány megválasztására 2–2 lehetőség van, de ezek csak két CE^* egyenest adnak, így a fenti $i = 1, 2$ eseteket sorra véve 4 megoldást kapunk. Az olvasóra hagyjuk annak bizonyítását, hogy a kapott gömbök kielégítik a feladat követelményeit.