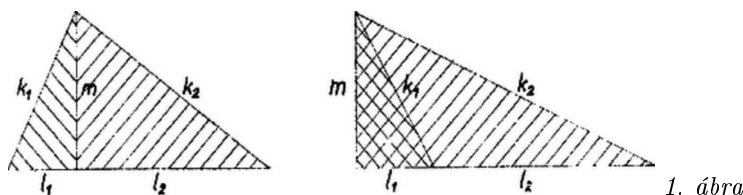


Ha egy trapéz megfelel a feladat követelményeinek, akkor egyik alapja egy-egy szárral és átlóval két olyan háromszöget alkot, amelyek oldalainak mértékszámja egész, egy oldaluk egyenlő, magasságuk 24, és az egyenlő oldalak mentén egymásra téve őket a közös oldallal szemben levő csúcsok távolsága is egész. Ilyen háromszögek keresése eredményes lesz összetolással, illetve részbeni fedéssel azokból a pythagorászi háromszögekből (1. ábra), amelyek egyik befogószáma $m = 24$. Így a magasságok talppontjainak az alap végpontjaitól mért távolságai egész számok, ezért a trapéz másik alapja is egész lesz.



A mondott számhármassok átfogószámát k -val, másik befogószámát l -l jelölve $m^2 = 576 = k^2 - l^2 = (k-l)(k+l)$. Itt a jobb oldal tényezői egész számok, továbbá párosak. Ugyanis szorzatuk páros, ezért az egyik tényező páros, így viszont összegük, $2k$, és különbségük, $2l$, csak akkor páros, ha a másik tényező is páros. Eszerint a $k, l, 24$ pythagorászi számhármassokat 576-nak két különböző páros szám szorzata gyanánt való előállításából kapjuk (ugyanis $k-l < k+l$). Hét ilyen van, lásd az I. táblázat egy-egy oszlopát.

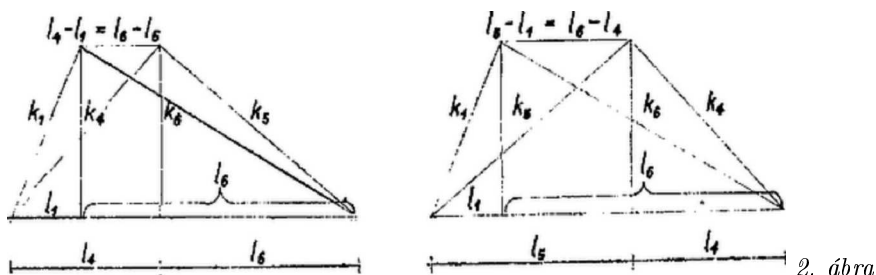
I.	$k-l =$	2,	4,	6,	8,	12,	16,	18;
	$k+l =$	288,	144,	96,	72,	48,	36,	32;
	$k =$	145,	74,	51,	40,	30,	26,	25;
$m = 24,$	$l =$	143,	70,	45,	32,	18,	10,	7.

Két-két (különböző, ill. egyenlő) l -befogó összegét és különbségét a II. táblázaton állítottuk össze, amelyen minden egyes l -értékhez egy sor és egy oszlop tartozik, az i -edik sor és a j -edik oszlop közös mezején $i \leq j$ esetén (a jobbra lejtő átlón és tőle jobbra fölfelé) az $l_j + l_i$ összeg áll, $i > j$ esetén pedig (balra lefelé) az $l_j - l_i$ különbség.

A táblázat 49 racionális háromszöget ad az $m = 24$ magasság-számhoz. Szóba jönnek továbbá maguk a felhasznált pythagorászi háromszögek is, hiszen amennyiben létezik derékszögű a trapézok között, annak származtató háromszögei közül az egyikben az alapon derékszög van.

II.	$l_1 = 7,$	$l_2 = 10,$	$l_3 = 18,$	$l_4 = 32,$	$l_5 = 45,$	$l_6 = 70,$	$l_7 = 143$
$l_1 = 7$	14	17	25	39	52	77	150
$l_2 = 10$	3	20	28	42	55	80	153
$l_3 = 18$	11	8	36	50	63	88	161
$l_4 = 32$	25	22	14	64	77	102	175
$l_5 = 45$	38	35	27	13	90	115	188
$l_6 = 70$	63	60	52	38	25	140	213
$l_7 = 143$	136	133	125	111	98	73	286

Nyilvánvaló, hogy minden $l_j + l_i$ ($i \neq j$) alapú háromszögből az alap felező merőlegesen való tükrözéssel egy racionális szimmetrikus trapézt kapunk, ennek rövidebb alapja $l_j - l_i$, az ilyenek száma tehát 21. Ha ugyanígy egy derékszögű háromszöget tükrözünk l_i felező merőlegesére, 7 racionális téglalap keletkezik. Tulajdonképpen feladatunknak azonban a nem szimmetrikus racionális trapézok előállítását tartjuk, ezek érdekesebbek, mert szárai és átlói különböző egész számok. Ilyen trapéz alapjai gyanánt a táblázatnak csak az ismétlődő számai szerepelhetnek, ezeket kiemeltük kövér nyomtatással.



Két egyező alaphosszra a két Heron-háromszöget kétféleképpen helyezhetjük rá, ha egyikük sem egyenlő szárú. Pl.

a

$$(1) \quad 77 = l_1 + l_6 = l_4 + l_5$$

egyenlőség alapján a 77 egységnyi alap l_1 részének végpontjára vagy az l_4 , vagy az l_5 rész végpontját illeszthetjük rá, és így a másik alap mértékszámán az első esetben $l_4 - l_1 = l_6 - l_5 = 25$, a másodikban $l_5 - l_1 = l_6 - l_4 = 38$ adódik (ezek természetesen ugyancsak ismétlődő alaphosszai a táblázatnak; 2. ábra), az egyenlőségek (1)-ből adódnak átrendezéssel. A trapéz átlóit és szárait a megfelelő számhármások k_1, k_4, k_5, k_6 átfogószámai adják.

	Alapok		Szárok		Átlók		Magasság
III.	14	25	25	30	25	40	24
	25	25	25	25	30	40	24
	25	38	40	51	25	74	24
	25	52	30	51	25	74	24
	25	63	25	51	30	74	24
	25	77	25	51	40	74	24
	38	77	25	40	51	74	24
	52	63	25	30	51	74	24

Hasonlóan végigmenve a táblázat összes egyező számpárjain, a III. táblázaton felsorolt 8 racionális trapézhez jutunk. A 63, 52, 38 alapszám két-két előfordulásából is 2–2 trapéz adódik, viszont a 25-ös három előfordulása háromféleképpen állítható párba, ezekből $3 \cdot 2 = 6$ trapéz, a 14 alapszám előfordulásaiból pedig 1, mert a 14, 25, 25 háromszög szimmetrikus m -re. Így a fenti trapézeket mindkét alapjuk révén megkapjuk, kivéve a 2. sorbelit, amely racionális paralelogramma (rombusz).

Nagy László (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. g. III. o. t.)

Laczkovich Miklós (Budapest, Fazekas g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladat nem kívánta az $m = 24$ magasságszámhoz tartozó összes racionális trapézek előállítását; a fentieket azért közöltük, mert különböző versenyzők más-más megoldást találtak.

2. A fentiekén kívül további megoldás nincs, megmutatjuk ugyanis, hogy ha egy háromszög a, b, c oldalainak és az a oldalhoz tartozó m magasságának hossza egész szám, akkor m talppontjának az a végpontjaitól mért

$$a_b = \sqrt{b^2 - m^2} = \sqrt{p} \quad \text{és} \quad a_c = \sqrt{c^2 - m^2} = \sqrt{q}$$

távolságai is egész számok. Ugyanis ezeknek vagy az összege egyenlő a -val, vagy (ha az a oldal egyik végpontjában tompaszög van) a pozitív különbsége:

$$(2) \quad \sqrt{p} \pm \sqrt{q} = a.$$

Ebből négyzetreemeléssel és rendezéssel

$$\pm 2\sqrt{pq} = a^2 - p - q = r,$$

egész szám, mert p, q egészek. Így $\pm\sqrt{q} = r/2\sqrt{p}$ és (2) alapján mindkét négyzetgyök racionális szám, ugyanis

$$\sqrt{p} + \frac{r}{2\sqrt{p}} = \frac{2p+r}{2\sqrt{p}} = a, \quad \sqrt{p} = \frac{2p+r}{2a}, \quad \sqrt{q} = a - \sqrt{p} = \frac{r+2q}{2a}.$$

Így egészek is, mert ha egy racionális szám nem egész, akkor négyzete sem az.

Eszerint feltételeink mellett b, m, a_b és c, m, a_c pythagorászi számhármások, a fentiekben az adott magassághoz megkaptuk az összes racionális trapézokat.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. g. II. o. t.)