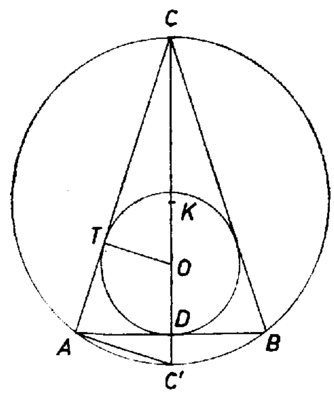
I. megoldás. Legyen ABC a keresett háromszög ($AC = BC$). Jelöljük a körülírt kör, ill. a beírt kör sugarát r-rel, ill. ϱ-val, AB felezőpontját D-vel, a körülírt kör C-vel átellenes pontját C'-vel, a beírt kör érintési pontját az AC száron T-vel (1. ábra).



1. ábra

Kifejezhetjük az

$$AC = AT + CT = AD + CT \tag{1}$$

összefüggésben fellépő távolságokat a $CD = m$ magassággal, és így m-re nyerünk egyenletet.

Az ACC' háromszög A-nál derékszögű, így a befogó, továbbá a magasság mértani közép tulajdonsága szerint

$$AC^2 = CC' \cdot CD = 2rm, \tag{2}$$

$$AD^2 = CD \cdot DC' = m(2r - m); \tag{3}$$

végül a beírt kör CT érintője és CD szelője közt a következő összefüggés áll fenn, mivel CD (az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye) átmegy a kör középpontján:

$$CT^2 = CD \cdot (CD - 2\varrho) = m(m - 2\varrho). \tag{4}$$

Ezeket (1)-be behelyettesítve

$$\sqrt{2rm} = \sqrt{m(2r - m)} + \sqrt{m(m - 2\varrho)}.$$

Egyszerűsíthetünk $\sqrt{m}$-mel, mert az nem lehet 0. Ezután a négyzetgyököket négyzetre emelések és átrendezések segítségével a szokott módon kiküszöbölve az

$$m^2 - 2(r + \varrho)m + \varrho(\varrho + 4r) = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek csak akkor van gyöke, ha $r \geq 2\varrho$, és ekkor gyökei:

$$m_{1,2} = r + \varrho \pm \sqrt{r(r - 2\varrho)}.$$

Innen (2) és (3) szerint

$$\begin{aligned} a_{1,2} = b_{1,2} = AC &= \sqrt{2r\big(r + \varrho \pm \sqrt{r(r - 2\varrho)}\big)} \quad \text{és} \\ c_{1,2} = 2AD &= 2\sqrt{\big[r + \varrho \pm \sqrt{r(r - 2\varrho)}\big]\big[r - \varrho \mp \sqrt{r(r - 2\varrho)}\big]} = \\ &= 2\sqrt{\varrho\big[2r - \varrho \mp 2\sqrt{r(r - 2\varrho)}\big]}. \end{aligned}$$

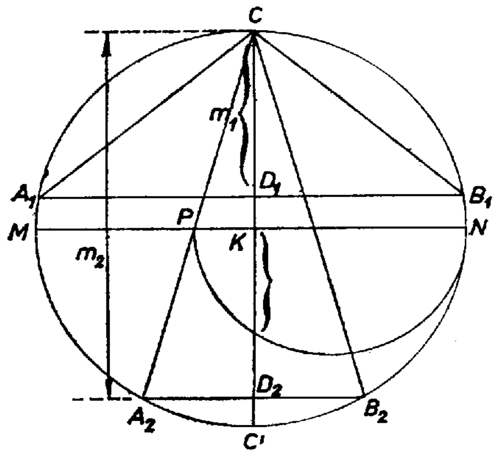
Itt

$$\sqrt{r(r - 2\varrho)} = \sqrt{r^2 - 2r\varrho} < r - \varrho$$

folytán

$$0 < m_1 = r + \varrho + \sqrt{r(r - 2\varrho)} < 2r \quad \text{és}$$

$$2r > r + \varrho > m_2 = r + \varrho - \sqrt{r(r - 2\varrho)} > 2\varrho > 0.$$



2. ábra

Ha $r \geq 2\varrho$, akkor mindig létezik a feltételeket kielégítő háromszög. Megszerkeszthető pl. a következő módon. Egy r sugarú, K középpontú k körben megszerkesztünk két egymásra merőleges CC' és MN átmérőt, utóbbira rámérjük az $MP = 2\varrho$ távolságot (2. ábra). A PN átmérőjű félkör CC'-vel való metszéspontjának K-tól mért távolsága $\sqrt{r(r-2\varrho)}$. Ezzel megszerkesztjük az m_1, ill. m_2 távolságot és rámérjük C-ből a CC' átmérőre; a D_1, ill. D_2 végpontban az átmérőre emelt merőleges metszi ki a körből a keresett háromszög A_1, B_1, ill. A_2, B_2 csúcsait. Ha $r = 2\varrho$, akkor $D_1 = D_2$, és egy háromszöget kapunk, különben kettőt.

Be kell látnunk, hogy az A_1B_1C és A_2B_2C háromszögek megfelelnek a követelményeknek. Mindkettő egyenlő szárú, körülírt körének sugara r.

Beírt körük ϱ_1', ill. ϱ_2' sugarát a háromszög területére vonatkozó $t = \frac{1}{2}m_i \cdot A_iB_i = \varrho_i's_i$ ($i = 1,\ 2$) képletből határozhatjuk meg, ahol s-sel a kerület felét jelöltük.

Mivel az A_iCC' háromszögek derékszögűek, fennállnak rájuk a (2), (3) összefüggések. Így

$$\varrho_i' = \frac{1}{2}\frac{m_i \cdot A_iB_i}{s_i} = \frac{m_i \cdot A_iD_i}{A_iC + A_iD_i} =$$
$$= \frac{m_i\sqrt{m_i(2r-m_i)}}{\sqrt{2r\,m_i} + \sqrt{m_i(2r-m_i)}} = \frac{m_i\sqrt{2r-m_i}}{\sqrt{2r}+\sqrt{2r-m_i}}.$$

Bővítve $\sqrt{2r} - \sqrt{2r-m_i}$-vel, majd beírva az m_i-t adó kifejezést,

$$\varrho_i' = \frac{m_i\sqrt{2r-m_i}(\sqrt{2r}-\sqrt{2r-m_i})}{2r-(2r-m_i)} =$$
$$= \sqrt{2r\big[r-\varrho \mp \sqrt{r(r-2\varrho)}\big]} - \big[r-\varrho \mp \sqrt{r(r-2\varrho)}\big],$$

ahol az 1 indexnek mindkét alternatív előjelből a fölső, a 2 indexnek mindkettőből az alsó felel meg. Az első tag így alakítható tovább:

$$\sqrt{2r\big[r-\varrho \mp \sqrt{r(r-2\varrho)}\big]} = \sqrt{2r\left[\frac{r}{2} \mp 2\sqrt{\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-\varrho\right)} + \left(\frac{r}{2}-\varrho\right)\right]} =$$
$$= \sqrt{2r\left[\sqrt{\frac{r}{2}} \mp \sqrt{\frac{r}{2}-\varrho}\right]^2} = \sqrt{2r}\left(\sqrt{\frac{r}{2}} \mp \sqrt{\frac{r}{2}-\varrho}\right) =$$
$$= r \mp \sqrt{r(r-2\varrho)}.$$

Így végül azt kaptuk, hogy

$$\varrho_i' = \big[r \mp \sqrt{r(r-2\varrho)}\big] - \big[r-\varrho \mp \sqrt{r(r-2\varrho)}\big] = \varrho,$$

mindkét index esetén, és ezt akartuk belátni.

Szép András (Budapest, Rákóczi F. G. IV. o. t.)

Megjegyzések: 1. Aszerint lesz m nagyobb vagy kisebb $r+\varrho$-nál, vagy egyenlő vele, amint C, K és a beírt kör O középpontja ebben a sorrendben sorakozik a CC' szakaszon, vagy C, O, K sorrendben, vagy O és K egybeesik. Az egyes esetekben $m = CK + KO + OD = r + KO + \varrho$, ill. $m = CK - KO + OD = r - KO + \varrho$, ill. $m = r + \varrho$. Összehasonlítva ezt az m-re kapott formulákkal és megfigyelve, hogy a harmadik eset csak $r = 2\varrho$ esetben következhet be, a $KO = \sqrt{r(r-2\varrho)}$ összefüggést nyerjük. Ezt az összefüggést bizonyítottuk a 788. gyakorlatban is. Mint ott is említettük, az összefüggés minden háromszögre fennáll, nemcsak az egyenlő szárúakra.

2. Kifejezhetjük az (1)-ben fellépő távolságokat a háromszögnek pl. az $AC = b$ oldalával is: (2)-ből $CD = b^2/2r$; ezt (3)-ba és (4)-be, és az AD és CT-re így adódó kifejezéseket (1)-be beírva b-re kapunk egyenletet, amit

$$b^4 - 4r(r+\varrho)b^2 + 4r^2\varrho(4r+\varrho) = 0$$

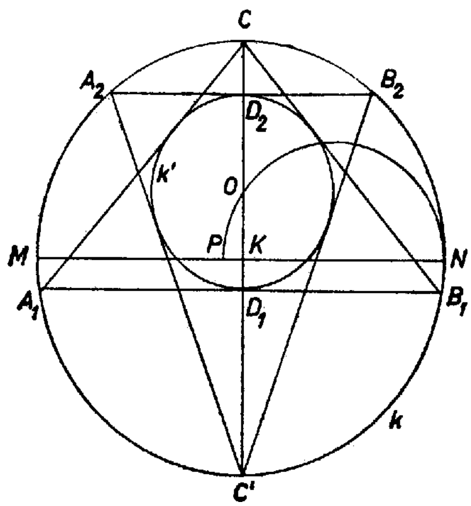
alakra hozhatunk. A fenti eljárás valamivel egyszerűbb számítást adott.

3. Igen egyszerű egyenlet adódik $AB/AC = c/b$-re is: az ACD és OCT háromszögek hasonlóságából $AD : CD = OT : CT$, innen és (2)-ből

$$CD = m = \frac{(c/2)(b-c/2)}{\varrho} = \frac{c(2b-c)}{4\varrho} = \frac{b^2}{2r},$$

és ez a következő alakba rendezhető át:

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{2\varrho}{r} = 0.$$



3. ábra

II. megoldás. Megoldható a feladat az 1. megjegyzésben talált és már a 788. gyakorlatból is ismert összefüggés alapján. Továbbra is a fenti jelöléseket használjuk. A beírt és körülírt kör középpontjának távolsága a mondott összefüggés szerint

$$d = \sqrt{r(r-2\varrho)},$$

ezt az I. megoldás 3. bekezdésében megszerkesztettük. Az ottani PN átmérőjű félkör CC'-vel való metszéspontja választható mindjárt a beírt kör O középpontjának (3. ábra). Az e körül ϱ sugárral rajzolt k' körhöz C-ből, ill. C'-ből húzott érintők metszik ki k-ból a keresett háromszög A_1, B_1, ill. A_2, B_2 csúcsait.

Az olvasóra bízzuk annak bizonyítását, hogy k' érinti az A_1B_1 és A_2B_2 egyeneseket, valamint annak megmutatását is, hogy megoldás csak $r \geq 2\varrho$ esetén van, és hogy ez esetben a különböző alakú háromszögek száma 2, kivéve a $d = 0$, $2\varrho = r$ esetet, amikor két egybevágó szabályon háromszög adódik.

A szerkesztést számítással követve egyszerűen kapjuk a CO távolságból a háromszög $OD_1 = m_1$ magasságát – ill. $C'O$-ből $C'D_2 = m_2$-t –, ezek ismeretében pedig az $A_iB_i = c_i$ alap A_iD_i felét ($i = 1, 2$) és az $A_1C = b_1$ (ill. $A_2C' = b_2$) szárat a $CC'A_i$ derékszögű háromszögből számíthatjuk ki. Legyen a CC' átmérőnek O-hoz közelebbi végpontja C. Ekkor $CO = r - d$, $C'O = r + d$, ezekből $m_{1,2} = r \mp d + \varrho$ és így – (1)-et is figyelembe véve –

$$A_iD_i^2 = CD_i \cdot D_iC', \qquad A_1C^2 = CC' \cdot CD_1, \qquad A_2C'^2 = CC' \cdot C'D_2,$$

$$c_i = 2\sqrt{m_i(2r-m_i)} = 2\sqrt{(r \mp +d+\varrho)(r \pm d - \varrho)} = 2\sqrt{r^2 - (\varrho \mp d)^2} =$$

$$= 2\sqrt{r^2 - \varrho^2 - d^2 \pm 2\varrho d} = 2\sqrt{2r\varrho - \varrho^2 \pm 2\varrho\sqrt{r(r-2\varrho)}},$$

$$b_i = \sqrt{2rm_i} = \sqrt{2r^2 + 2r\varrho \mp 2r\sqrt{r(r-2\varrho)}}.$$

$r \geq 2\varrho$ esetén a külső négyzetgyökök alatt is pozitív szám áll, mert D_1 nyilvánvalóan k belsejében van, és ugyanez áll D_2-re is, különben $KD_2 = KO + OD_2 = d + \varrho \geq KC = r$-ből $d^2 \geq (r-\varrho)^2 = d^2 + \varrho^2$ következnék, ami lehetetlen.

Czina Ferenc (Makó, József A. G. III. o. t.)

Hortobágyi József (Budapest, Bláthy O. Erősár. Ip. T. IV. o. t.)