

a) Legyen az első egyenlet egy gyöke c , ez nyilván nem lehet 0. Reriprokát a második egyenlet bal oldalába helyettesítve

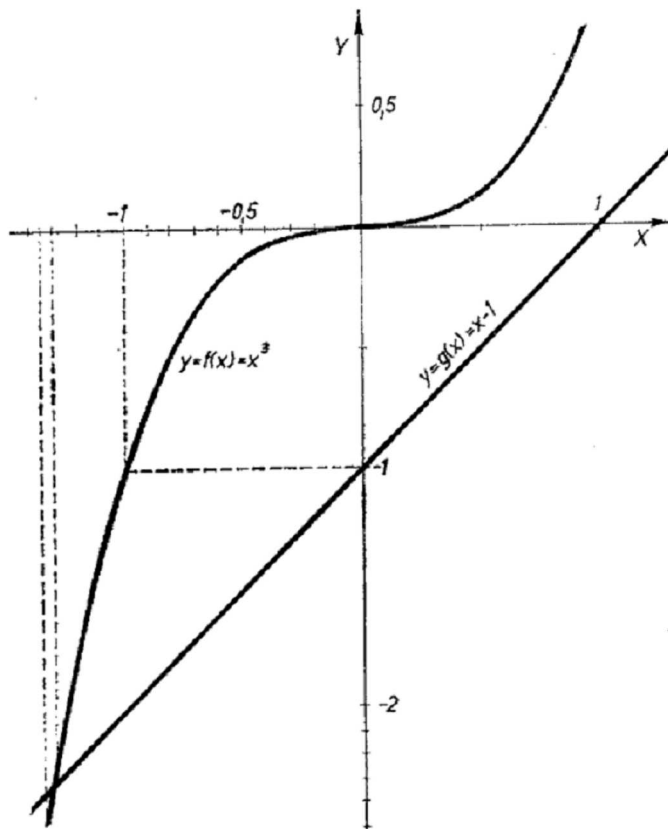
$$\left(\frac{1}{c}\right)^5 + \frac{1}{c} + 1 = \frac{1}{c^5} (1 + c^4 + c^5).$$

Ez csak úgy lehet 0, ha a második tényező 0. Ez biztosan bekövetkezik, ha kiemelhető belőle a feltétel szerint 0-val egyenlő $c^3 - c + 1$ tényező; ez teljesül is:

$$1 + c^4 + c^5 = (1 - c + c^3) (1 + c + c^2).$$

Mivel c az első egyenlet bármelyik gyökét jelentheti, mindegyik gyök reciproka kielégíti a második egyenletet is.

b) A valós gyök meghatározására írjuk a második egyenletet $x^5 = -x - 1$ alakban. A bal oldal x növekedtével nő, a jobb oldal csökken, tehát csak egy közös értékük lehet, és egy van is, mert $x = -1$ -re a bal oldal a kisebb, $x = 0$ -ra pedig a jobb oldal.



Az első egyenlet ígér kényelmesebb számítást, írjuk azt $x^3 = x - 1$ alakban, és ábrázoljuk az $f(x) = x^3$ és $g(x) = x - 1$ függvényeket. A metszéspont abszcisszájára $-1,3$ körüli értéket olvasunk le. Behelyettesítve: $f(-1,3) = -2,197$, $g(-1,3) = -2,3 < f(-1,3)$, tehát a gyök ennél kisebb érték. Helyettesítve $-1,35$ -öt:

$$f(-1,35) = -1,35 \cdot 1,35^2 < -1,35 \cdot 1,8 = -2,43 < g(-1,35) = -2,35,$$

így a keresett gyök $-1,35$ és $-1,3$ közé esik, tehát közelítő értéke egy tizedes pontossággal $-1,3$.

Mostmár a második egyenlet gyöke az a) részben bebizonyított állítás szerint $-1,35$ és $-1,3$ reciproka közé esik. Az utóbbi reciproka nagyobb $-0,77$ -nél, az előbbi reciproka kisebb $-0,74$ -nél. Egy tizedesre kerekítve a közbülső értékek egy része $-0,8$ -et ad, egy részük $-0,7$ -et. Behelyettesítve $-0,75 = -3/4$ -et az $x^5 = -x - 1$ alakba, a bal oldal $-243/1024$, a jobb $-1/4$, ez a kisebb, így a fentiek szerint a két oldal valamely a $-3/4$ -nél kisebb érték esetében egyenlő, tehát kerekítve a gyök $-0,8$.

Tongori Éva (Székesfehérvár, Teleki B. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Néhányan az $x^3 - x + 1 = 0$ egyenlet valós gyökét az $x^3 + px + q = 0$ egyenlet ún. *Cardano*-féle

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

gyökképletével határozták meg, ami – ebben az esetben – több számolással járt a fenti próbálgatásnál.