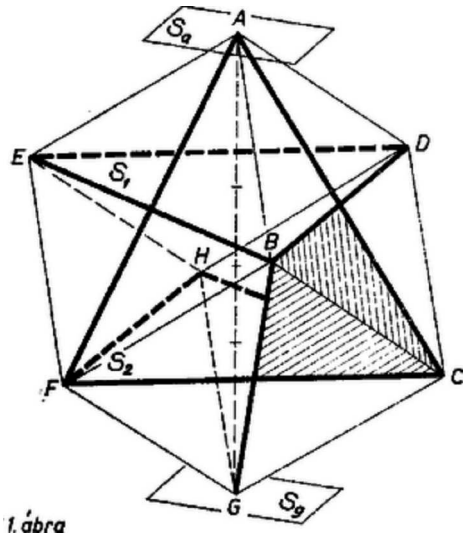
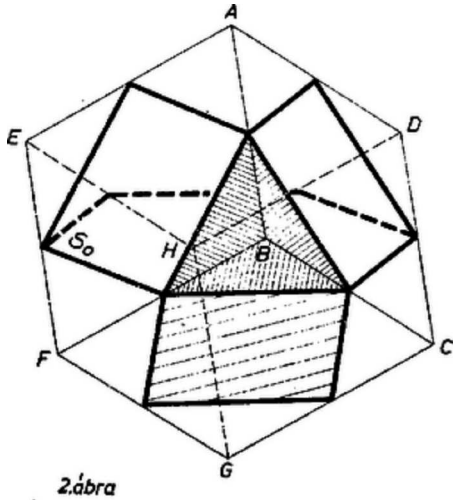
I. Legyen a kocka két párhuzamos lapja $ABCD$ és $EFGH$ úgy, hogy $AE$ és $BF$ párhuzamos élek. Vizsgáljuk először pl. az $AG$ testátló felező és harmadoló pontjaiban az átlóra merőlegesen állított síkokat. Azt állítjuk, hogy az utóbbi két sík a $B$, $D$, $E$ és a $C$, $F$, $H$ csúcsokon átmenő $S_1$ és $S_2$ sík, más szóval az $A$-ból, ill. $G$-ből induló élek végpontjain átmenő sík.



1. ábra

Ez következik abból, hogy egyrészt az $ABG$, $ADG$, $AEG$ egybevágó háromszögek $B$, $D$, ill. $E$ csúcsából húzott magasság ugyanabban a pontban metszi $AG$-t, tehát $S_1$ az ebben a pontban $AG$-re állított merőleges sík, és hasonlóan $S_2$ is merőleges $AG$-re. Másrészt $A$-ban és $G$-ben is $S_a$, ill. $S_g$ merőleges síkot állítva $AG$-re a szomszédos síkpárok közé párhuzamos (és egyenlő) kockaélek esnek: $S_a$ és $S_1$ közé $AB$, $S_1$ és $S_2$, közé $DC$, továbbá $S_2$ és $S_g$ közé $HG$. Ezek a síkpárok tehát egyenlő távolságra vannak egymástól, s így $AG$-t 3 egyenlő részre osztják. $S_1$ és $_2$ tehát valóban az $AG$ harmadoló pontjaiban állított, egyértelműen meghatározott merőleges síkok.



2. ábra

Az $AG$-re a felező pontjában állított $S_0$ merőleges sík $S_1$ és $S_2$ közt, velük párhuzamosan és tőlük egyenlő távolságban helyezkedik el, így felezi a kocka

(1) $$BF, \quad FE, \quad EH, \quad HD, \quad DC, \quad CB$$

éleit, más szóval mindazokat az éleket, amelyeknek sem $A$, sem $G$ nem végpontja.

II. Tekintsük előbb a feladat második kérdését. $S_1$ és $S_2$ a kocka felületét az $A$, ill. $G$ csúcsban összefutó 3–3 lapnak $A$-t, ill. $G$-t nem tartalmazó átlóiban metszi. Sorra véve a $BH$, $CE$, $DF$ testátlókat merőlegesen harmadoló síkpárokat, $A$ és $G$ helyén minden kockacsúcs sorra kerül és osztóvonal gyanánt minden lapbeli átló is, éspedig mindegyik kétszer, és más osztóvonal nem lép fel. A lapbeli átlók a kocka 6 lapját 24 egyenlő szárú derékszögű háromszögre darabolják szét. 2–2 ilyen háromszög átfogója közös, a kocka 1–1 éle, ami nem osztóvonal, a háromszögpár összefüggő részt alkot, tehát a 4 síkpár a kocka felületét 12 részre osztja.

A feladat első kérdésében $S_0$ szerepel, ez a kocka mindegyik lapjából lemetsz egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelyben a derékszög csúcsa a lapnak $A$-val, ill. $G$-vel szemben fekvő csúcsa, átfogója pedig az ide befutó

oldalak felezőpontjait összekötő szakasz, ezekből a szakaszokból tevődik össze $S_0$ metszésvonala. Sorra véve a további 3 testátló felező merőleges síkjait, $A$ és $G$ helyén minden kockacsúcs sorra kerül, a kis háromszög derékszögének csúcsa gyanánt ugyancsak, éspedig 3-szor, továbbá átfogó végpontja gyanánt minden él felezőpontja is, 2-szer. Így a kocka mindegyik lapja 4 kis háromszögre és köztük 1 négyzetre oszlik. Az utóbbiaknak a teljes kerülete osztóvonal, ezek tehát a felület különálló részei lesznek. A kis háromszögek viszont 3-asával 1–1 kockacsúcsban futnak össze, egymáshoz páronként befogójukkal csatlakoznak, ami nem osztóvonal, tehát 3–3 kis háromszög a kockafelület 1–1 összefüggő részét alkotja, amelynek határvonalát a 3 átfogó adja. Ezek szerint a kocka felületét a testátlók felező merőleges síkjai 6+8=14 részre osztják fel.

*Sükösd Csaba* (Budapest, József A. g. III. o. t.)
*Csörnyei Zoltán* (Veszprém, Lovassy L. g. IV. o. t.)