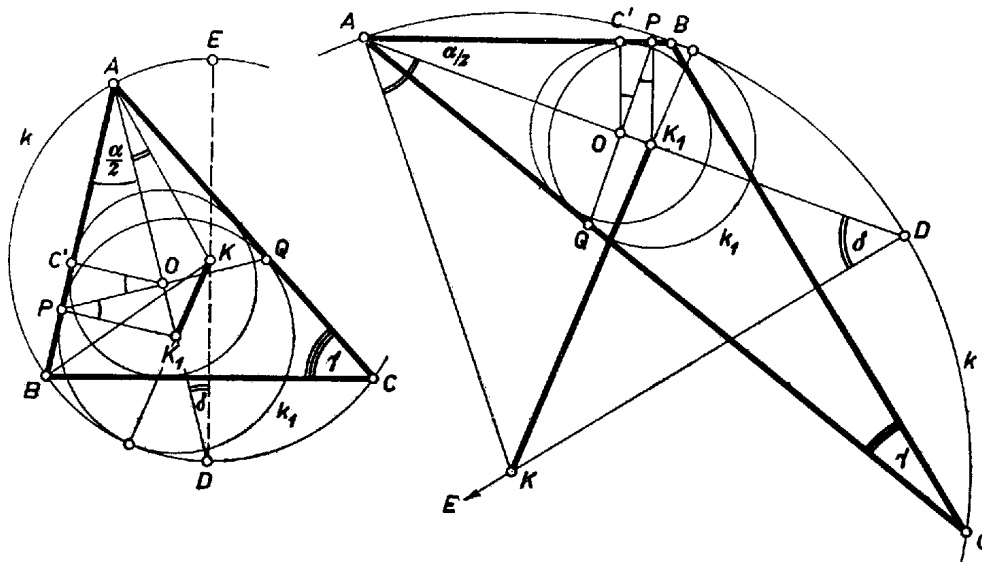


A feladatban állított érintkezés következik abból, ha megmutatjuk, hogy a kérdéses  $k_1$  kör  $K_1$  középpontjának a háromszög köré írt  $k$  kör  $K$  középpontjától mért távolságának és a két kör  $r_1$  és  $r$  sugara különbségének a négyzete egyenlő, tehát  $KK_1 = |r_1 - r|$ ; így a két kör közt belső érintkezés áll fenn. Könnyű látni, hogy csak  $k$  tartalmazhatja  $k_1$ -et, ugyanis a háromszög belső  $O$  pontján átmenő egyenes az  $AB$ ,  $AC$  oldalak legalább egyikét belső pontban metszi, tehát a  $P$  és  $Q$  pontok legalább egyike  $k$  belsejében és  $k_1$  határán van.



$KK_1$ -et az  $AKK_1$  háromszögből fogjuk kiszámítani koszinusz-tétellel. Fel fogjuk használni – a szokásos jelölésekkel élve – a

$$(1) \quad \varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

összefüggést.<sup>2</sup> A  $KAK_1\angle = \delta$  szög meghatározására jegyezzük meg, hogy az  $ADK$  egyenlő szárú háromszögből  $ADK\angle = \delta$ , így az együttesen félkört kitevő  $EA$ ,  $AB$ ,  $BD$  íveken rendre  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha/2$  nagyságú szögek nyugszanak. Ezek összege tehát  $90^\circ$ , s így  $\delta = 90^\circ - (\alpha/2 + \gamma)$ . Az  $AK_1P$  háromszögből  $AK_1 = r_1 / \sin(\alpha/2)$ . Így<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} KK_1^2 &= AK^2 + AK_1^2 - 2AK \cdot AK_1 \cos \delta = \\ &= r^2 + \frac{r_1^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2rr_1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \gamma \right). \end{aligned}$$

Ebből levonva  $(r - r_1)^2$ -t:

$$\begin{aligned} KK_1^2 - (r - r_1)^2 &= \frac{r_1^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left( 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{2rr_1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left[ \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \gamma \right) - \sin \frac{\alpha}{2} \right] = \\ &= \frac{r_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left[ r_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2r \sin \frac{\alpha}{2} \left( 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{r_1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left( r_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

A zárójelben a kivonandó (1) szerint  $\varrho$ . A kisebbítendő átalakítására fogjuk felhasználni azt, hogy  $P$  az  $O$ -n át  $AO$ -ra merőlegesen húzott egyenesen van. Legyen a beírt kör érintési pontja az  $AB$  oldalon  $C'$ . Ekkor  $C'OP$  és  $OPK_1$  a  $BAD$  szögre nézve merőleges szárú hegyes szögek, tehát  $\alpha/2$  nagyságúak. Így a  $K_1PO$  és  $POC'$  derékszögű háromszögekből

$$r_1 \cos \frac{\alpha}{2} = PO, \quad r_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = PO \cos \frac{\alpha}{2} = OC' = \varrho.$$

A felírt különbség értéke tehát valóban 0, amint állítottuk.

Siket Aranka (Makó, József A. g.)

<sup>2</sup>Lásd pl. Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.: Matematikai versenytételek I. (3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965) 40. o.

<sup>3</sup>Ha  $AB = AC$ , akkor  $\delta = 0$ , mert  $\alpha/2 + \gamma = 90^\circ$ , így az egyenlőség ebben az esetben is helyes.