

a) $c^2 - 1$ négyzetgyöke kisebb c -nél, de nagyobb $c - 1$ -nél

$$(2) \quad c - 1 < \sqrt{c^2 - 1} < c,$$

ugyanis természetes szám négyzeténél 1-gyel kisebb szám nem teljes négyzet, kivéve $c = 1$ esetét, ekkor viszont az érdektelen $\sqrt{0}$ esetre jutunk. Ezt kizárva a $\sqrt{c^2 - 1} - (c - 1)$ különbség 1-nél kisebb pozitív szám, és reciprokanak egész része lesz a lánctört-kifejtés első nevezőjének első tagja. Ez 1, ugyanis

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1} - (c - 1)} = \frac{\sqrt{c^2 - 1} + (c - 1)}{2(c - 1)},$$

és itt a számláló (2) szerint nagyobb a nevezőnél, de nem éri el a nevező 2-szeresét. Ezért

$$\sqrt{c^2 - 1} - (c - 1) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{c^2 - 1} - (c - 1)}{2(c - 1)}}.$$

A nevező második tagjának reciproka (3)-nak $2(c - 1)$ -szerese, így nagyobb, mint $2(c - 1)$, másrészt kisebb az 1-gyel nagyobb számnál:

$$\frac{2(c - 1)}{\sqrt{c^2 - 1} - (c - 1)} = \sqrt{c^2 - 1} + (c - 1) < 2c - 1,$$

ezért

$$\sqrt{c^2 - 1} - (c - 1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2(c - 1) + [\sqrt{c^2 - 1} - (c - 1)]}}$$

A maradék megegyezik a bal oldallal, ezért váltakozva vég nélkül az 1 és a $2(c - 1)$ rész-nevezők ismétlődnek:

$$(4) \quad \sqrt{c^2 - 1} = (c - 1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{2(c - 1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{2(c - 1) + \dots}}}}.$$

A további két kifejtendő négyzetgyök c és $c + 1$ közé esik:

$$(5) \quad c < \sqrt{c^2 + 1} < c + 1, \quad c < \sqrt{c^2 + c} < \sqrt{c^2 + 2c + 1} = c + 1.$$

Hasonló számítással kapjuk, hogy az elsőben egyetlen rész-nevező ismétlődik: $2c$, a másodikban ismét kettő: 2 és $2c$, ugyanis

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + 1} - c &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1} + c} = \frac{1}{c2 + [\sqrt{c^2 + 1} - c]}, \\ \sqrt{c^2 + 1} &= c + \frac{1}{2c + \frac{1}{2c + \frac{1}{2c + \dots}}} \end{aligned}$$

illetőleg

$$(6) \quad \begin{aligned} \sqrt{c^2 + c} - c &= \frac{1}{\frac{\sqrt{c^2 + c} + c}{c}} = \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{c^2 + c} - c}{c}} = \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{c^2 + c} + c}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2c + [\sqrt{c^2 + c} - c]}} \\ \sqrt{c^2 + c} &= c + \frac{1}{2 + \frac{1}{2c + \frac{1}{2 + \frac{1}{2c + \dots}}}} \end{aligned}$$

A negyedik gyökjel alatt $(c+1)^2 - 1$ áll, ezért a négyzetgyök lánctört kifejtését (4)-ből kaphatjuk, c helyére mindenütt $c+1$ -et írva:

$$\sqrt{c^2 + 2c} = c + \frac{1}{1 + \frac{1}{2c + \frac{1}{1 + \frac{1}{2c + \dots}}}}$$

b) Az (1) alakú kifejtésben a_i gyanánt ($i = 0, 1, 2, \dots$) mindig a nagyobbat kell vennünk a közül a két szomszédos egész szám közül, amely a négyzetgyököt, ill. a negatív maradéktag reciprokát közrefogja. Így (5) alapján

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + c} - (c+1) &= -[c+1 - \sqrt{c^2 + c}] = \\ &= -\frac{1}{\frac{c+1 + \sqrt{c^2 + c}}{c+1}} = -\frac{1}{2 - \frac{c+1 - \sqrt{c^2 + c}}{c+1}}, \\ &= -\frac{1}{2 - \frac{1}{c+1 + \sqrt{c^2 + c}}} = -\frac{1}{2 - \frac{1}{2(c+1) - [c+1 - \sqrt{c^2 + c}]}}, \\ (7) \quad \sqrt{c^2 + c} &= c+1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2(c+1) - \frac{1}{2 - \frac{1}{2(c+1) - \dots}}}} \end{aligned}$$

Mármost (6)-ból és (7)-ből $c = 3$ -mal és $c = 4$ -gyel

$$\begin{aligned} \sqrt{12} &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \dots}}}}, & \sqrt{20} &= 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8 + \dots}}}}, \\ \sqrt{12} &= 4 - \frac{1}{2 - \frac{1}{8 - \frac{1}{2 - \frac{1}{8 - \dots}}}}, & \sqrt{20} &= 5 - \frac{1}{2 - \frac{1}{10 - \frac{1}{2 - \frac{1}{10 - \dots}}}} \end{aligned}$$

Négy-négy közelítő törtjük közül a páratlan sorszámúak megegyeznek, a páros sorszámúak különbözők:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{7}{2}, & \frac{45}{13}, & \frac{97}{28}, & \frac{627}{181}, & \dots, & \text{és} & \frac{9}{2}, & \frac{76}{17}, & \frac{161}{36}, & \frac{1364}{305}, & \dots \\ \frac{7}{2}, & \frac{52}{15}, & \frac{97}{28}, & \frac{724}{209}, & \dots, & \text{és} & \frac{9}{2}, & \frac{85}{19}, & \frac{161}{36}, & \frac{1525}{341}, & \dots \end{array}$$

Sófalvi Mihály (Budapest, Bláthy O. erősáramú ip.t. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy az utolsó részben talált megegyezések a további közelítő törtek között is (és általában is) fennállanak minden 1-nél nagyobb c egész szám esetén.

Pelikán József (Budapest, Fazekas M. gyak, g. II. o. t.)

2. Többen nem keresték meg az egyes nevezőket közrefogó egész számokat, hanem bizonyos azonosságokra hivatkozva „gépiesen” végezték a kifejtést. A meggondolás lényegének figyelmen kívül hagyása ez esetben is sok hibára vezetett.