

Tegyük fel, hogy az  $x, y, z, u$  egész számok – amelyek között van 0-tól különböző is –, kielégítik az

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = u^2$$

egyenletet, és keressük az olyan 0-tól különböző  $d$  egész számokat, amelyekkel teljesül

$$(2) \quad (x + d)^2 + (y + d)^2 + (z + d)^2 = (u + d)^2.$$

Innen a feltevések figyelembevételével

$$(3) \quad d = u - x - y - z,$$

feltéve, hogy ez az (egész) szám 0-tól különböző. Eszerint általában van ilyen szám, éspedig általában több is, mert (1) egy megoldása helyébe a negatívját véve is megoldást kapunk, és ez a változtatás (3)-ban újabb  $d$  értékre vezet, amennyiben nem 0-t ad.

Az adott egyenlőség szerint  $x = y = 0$ ,  $z = \pm 1$ , és  $u = \pm 1$ . Az előjeleket variálva (3)-ból a  $z = u$  esetekben az érdektelen  $d = 0$ -t kapjuk, a  $z = -u = 1$  esetben  $d = -2$ -t,  $z = -u = -1$  esetén pedig  $d = 2$ -t, azonban a (2) számára így adódó

$$-2, -2, -1, -3 \text{ és } 2, 2, 1, 3$$

új megoldások nem lényegesen különbözők. A 806. gyakorlat egyenletéhez hasonlóan általában is (2) egy talált megoldásának negatívját kapjuk, ha  $x, y, z, u$  mindegyike helyett a  $(-1)$ -szeresét vesszük, – ezért  $u$ -t nem vesszük negatívnak. A 2, 2, 1, 3 megoldás előjel variációi közül elég az első két szám 2,  $-2$ , és  $-2$ , 2 választásának csak az egyikét venni, pl. az elsőt, mert a másik nem ad újabb  $d$  értéket. Az így maradó 6 variáció közül az első a kiindulási megoldásra vezet vissza, a másodikban  $d = 0$ , a harmadikban egy 0 tag lép fel, az utolsó három viszont egy-egy új megoldást ad:

| $x$  | $y$  | $z$  | $u$ | $d$  | $x + d$ | $y + d$ | $z + d$ | $u + d$ |
|------|------|------|-----|------|---------|---------|---------|---------|
| 2    | 2    | 1    | 3   | $-2$ | 0       | 0       | $-1$    | 1       |
| 2    | 2    | $-1$ | 3   | 0    | –       | –       | –       | –       |
| 2    | $-2$ | 1    | 3   | 2    | 4       | 0       | 3       | 5       |
| 2    | $-2$ | $-1$ | 3   | 4    | 6       | 2       | 3       | 7       |
| $-2$ | $-2$ | 1    | 3   | 6    | 4       | 4       | 7       | 9       |
| $-2$ | $-2$ | $-1$ | 3   | 8    | 6       | 6       | 7       | 11      |

Valóban

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2, \quad 4^2 + 4^2 + 7^2 = 9^2, \quad 6^2 + 6^2 + 7^2 = 11^2.$$

*Pomozi István* (Szentendre, Móricz Zs. g. III. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. Néhány dolgozat megkereste (1) bal oldalán csak 2 tagot növelve az  $(x+d)^2 + (y+d)^2 + z^2 = (u+d)^2$  egyenletből adódó megoldásokat is. Hosszabb számítással a fentiekben és a 806. gyakorlat\*<sup>1</sup> egy 0 taggal kiegészített megoldásain felül a következőket kapták:

$$\begin{aligned} 1^2 + 4^2 + 8^2 &= 9^2, & 1^2 + 12^2 + 12^2 &= 17^2, \\ 3^2 + 14^2 + 18^2 &= 23^2, & 4^2 + 13^2 + 16^2 &= 21^2. \end{aligned}$$

2. Az  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y^2$  egyenlet egész megoldásaiból  $(x_1 + d)^2 + \dots + (x_n + d)^2 = (y + d)^2$  alakú megoldásokat keresve hasonlóan

$$d = \frac{2}{n-1}(y - x_1 - x_2 - \dots - x_n),$$

ami általában nem egész, de racionális szám. Eszerint a hasonlóan képezett új racionális megoldásokat  $n - 1$ -gyel szorozva új, egész megoldásokat kapunk.

*Deák István* (Budapest, Vörösmarty M. g. IV. o. t.)

<sup>1</sup>1963/9 24–25. old.