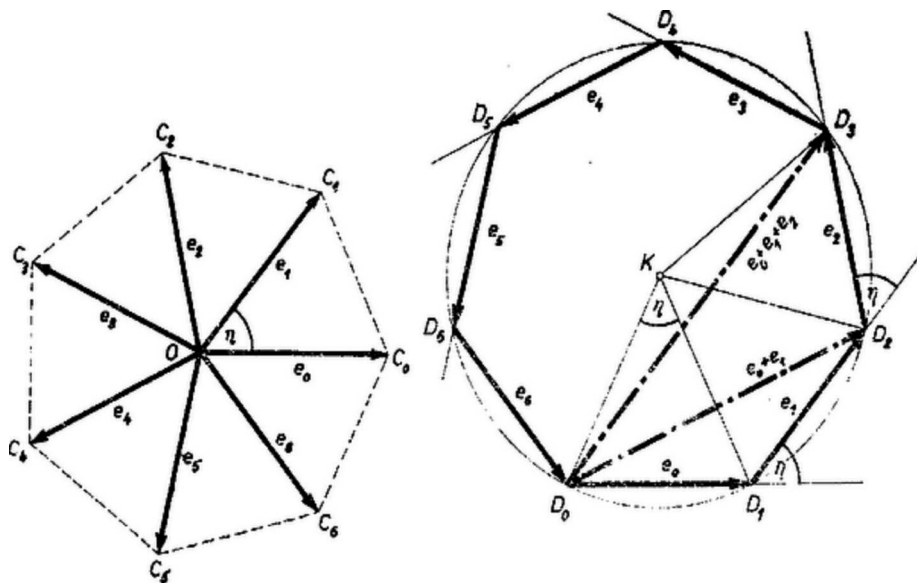


A bizonyítandó egyenlőség fennállását az 1246. feladat II. megoldásában számítással igazoltuk, ezért az alábbiakban számító megoldást nem közlünk.

I. megoldás. Írjunk egy egységnyi sugarú körbe egy $C_0C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ szabályos hétszöget és irányítsunk mindegyik csúcsához egy vektort ¹ a kör O középpontjából, legyenek ezek $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6$. Megmutatjuk, hogy e vektorok $\mathbf{e}$ összege a $\mathbf{0}$ vektor.



Mérjük fel egy D_0 pontból az $\mathbf{e}_0$ -val egyenlő $\overrightarrow{D_0D_1}$ vektort, ennek D_1 végpontjából kiindulva a paralelogrammaszabály alkalmazásával az $\mathbf{e}_1$ -gyel egyenlő $\overrightarrow{D_1D_2}$ -t, D_2 -ből az $\mathbf{e}_2$ -vel egyenlő $\overrightarrow{D_2D_3}$ -t, és így tovább, végül az $\mathbf{e}_5$ -tel egyenlő $\overrightarrow{D_5D_6}$ -nak D_6 végpontjából az $\mathbf{e}_6$ -tal egyenlő $\overrightarrow{D_6D_7}$ -t. Ekkor $D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ egy szabályos hétszög egymás utáni csúcsai, és D_7 azonos D_0 -lal. Ugyanis a $D_0D_1D_2$ háromszög egyenlő szárú, a D_0 -nál és D_2 -nél levő szögek fele a D_1 -nél levő külső szögnek, ez pedig egyenlő az $\mathbf{e}_0$ és $\mathbf{e}_1$ közti szöggel, vagyis a teljes szög hetedrészével, jelöljük ezt η -val. Írjunk k kört a $D_0D_1D_2$ háromszög köré, és legyen ennek középpontja K , így a D_0KD_1 és D_1KD_2 szögek egyenlők η -val, és K az az egyetlen pont ², amelyből D_0D_1 és D_1D_2 látószöge η . Meggondolásunkat megismételve $\mathbf{e}_0$ és $\mathbf{e}_1$ helyén $\mathbf{e}_1$ -gyel és $\mathbf{e}_2$ -vel, kapjuk, hogy a $D_1D_2D_3$ háromszög körülírt körének középpontja K , vagyis D_3 rajta van k -n. Ugyanígy haladva tovább D_7 is a k -n van, és a $\overrightarrow{D_0KD_1}, \overrightarrow{D_1KD_2}, \dots, \overrightarrow{D_6KD_7}$ szögek összege 7η a teljes szög, így valóban $D_7 \equiv D_0$ és $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_6 = \overrightarrow{D_0D_7} = \mathbf{0}$.

Bontsuk fel vektorainkat az $\mathbf{e}_0$ -val megegyező irányú és arra merőleges összetevőkre, ekkor $\mathbf{e}_h$ koordinátái

$$\mathbf{e}_h \left(\cos \frac{h \cdot 2\pi}{7}, \sin \frac{h \cdot 2\pi}{7} \right) \quad (h = 0, 1, 2, \dots, 6)$$

(a C csúcsok indexei a pozitív forgás irányában növekszenek).

Az összetevők összege bármely irányra nézve $\mathbf{0}$, mert $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ -nak bármely irányú összetevője $\mathbf{0}$. Írjuk fel ezt az $\mathbf{e}_0$ irányú összetevőkre, és alkalmazzuk a tagokra a

$$\cos(x - \pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \cos(2\pi - x) = \cos x$$

azonosságokat:

$$\begin{aligned} 1 + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} &= \\ = 1 + \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} &= \\ = 2 \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ezért a zárójeles kifejezés 0, ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőség jobb és bal oldalának különbsége. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

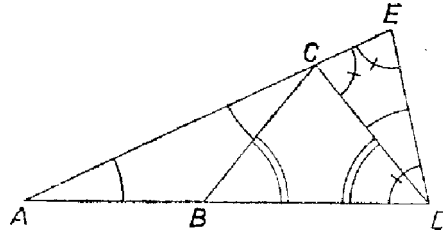
Komor Tamás (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

¹ A vektorokra vonatkozó elemi ismeretek megtalálhatók pl.: *Hajós György-Neukomm Gyula-Surányi János: Matematikai Versenytételek* II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1957) 26–30. o.

² A kisebb $D_0D_1D_2$ szögtartományban.

Megjegyzés. Az $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ megállapítást a szimmetriát jobban kihasználva rövidebben kapjuk a következő megfontolással. Vektorrendszerünk az O körüli η szögű elforgatással önmagába megy át, ezért összegét az eredeti és az elforgatott helyzetben képezve ugyanazt az eredményt kapjuk. Az elforgatott helyzetbeli összeg az eredeti összegből η -val való elforgatással adódik, ez csak akkor azonos az eredeti összeggel, ha az összeg $\mathbf{0}$, mert a nullvektortól különböző vektort elforgatva, tőle különböző vektort kapunk, hacsak a forgási szög nem egész számú többszöröse 2π -nek.

Földes Antónia (Budapest, Apáczai Csere J. g. IV. o. t.)



II. megoldás. Mérjük fel egy $\vartheta = \pi/7$ nagyságú szög A csúcsától az egyik szárra az $AB = 1$ szakaszt, majd jelöljük ki a szárazon váltakozva az előbbiektől mindig különböző C, D, E pontokat úgy, hogy álljon $AB = BC = CD = DE$. Ekkor az ábra összes szögeit kifejezhetjük ϑ -val, figyelembe véve, hogy az ABC, BCD és CDE háromszögek egyenlő szárúak, valamint a külső szög tételét alkalmazva az ABC és ACD háromszögekre: $ACB \sphericalangle = \vartheta$; $CBD \sphericalangle = CDB \sphericalangle = 2\vartheta$; $DCE \sphericalangle = DAC \sphericalangle + ADC \sphericalangle = 3\vartheta$ (hegyesszög) $= CED \sphericalangle$; $CDE \sphericalangle = \vartheta$; végül $ADE \sphericalangle = 3\vartheta$. Ezek szerint, az ADE háromszög is egyenlő szárú: $AE = AD$, ill. e száraz részeit az előbbi egyenlő szárú háromszögekből ϑ -val kifejezve

$$AC + CE = AB + BD, \quad 2 \cos \vartheta + 2 \cos 3\vartheta = 1 + 2 \cos 2\vartheta.$$

Innen a bizonyítandó egyenlőség osztással és rendezéssel adódik.

Nagy László (Budapest, I. István g. IV. o. t.)