

Egyszerűen kifejezhetjük x_1 -gyel és x_2 -vel a többi ismeretleneket: először az (1)-ből x_5 -öt, (2)-ből x_3 -at, majd ezek felhasználásával (3)-ból x_4 -et:

$$\begin{aligned}(1a) \quad & x_5 = yx_1 - x_2, \\(2a) \quad & x_3 = -x_1 + yx_2, \\(6) \quad & x_4 = -yx_1 + (y^2 - 1)x_2.\end{aligned}$$

A nyert kifejezéseket (4)-be és (5)-be beírva és 0-ra redukálva az egyenleteket (közben a kínálkozó kiemelési lehetőséggel is élve):

$$\begin{aligned}& (y - 1)(x_1 + x_2) + y^2x_1 - y(y^2 - 1)x_2 = \\& = (y^2 + y - 1)x_1 + (y - 1)[1 - y(y + 1)]x_2 = 0, \\(1 - y)x_1 + (y^2 - 1)x_2 - y^2x_1 + yx_2 & = (1 - y - y^2)x_1 + (y^2 + y - 1)x_2 = 0;\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}(7) \quad & (y^2 + y - 1)[x_1 - (y - 1)x_2] = 0, \\(8) \quad & (y^2 + y - 1)(-x_1 - x_2) = 0.\end{aligned}$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, ha

$$(9) \quad y^2 + y - 1 \neq 0.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}(7a) \quad & x_1 - (y - 1)x_2 = 0, \\(8a) \quad & x_1 - x_2 = 0,\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}(10) \quad & x_1 = x_2, \\(11) \quad & (y - 2)x_1 = 0.\end{aligned}$$

Ebből, ha még $y \neq 2$ is teljesül, (1a), (2a) és (6) alapján következik, hogy

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Ez nyilván kielégíti az (1)–(5) egyenleteket.

$y = 2$ esetén – amikor (9) is teljesül – (11)-et kielégíti bármely x_1 szám, ekkor (10), (1a), (2a) és (6)-ból

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_1$$

adódik, és ez $y = 2$ mellett tetszés szerinti x_1 értékre kielégíti az (1)–(5) egyenletrendszert.

Ha

$$(12) \quad y^2 + y - 1 = 0,$$

vagyis y az

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{és} \quad \eta_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

számok valamelyikével egyenlő, akkor a (7), (8) egyenletrendszert tetszés szerinti x_1, x_2 számpár kielégíti, a további három ismeretlen megfelelő értékét pedig (1a), (2a), ill. (6) állítja elő. Mivel a (12) egyenlet gyökeire

$$\eta_i^2 - 1 = -\eta_i, \quad (i = 1, 2)$$

így a megoldás:

$$(13) \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 = -x_1 + \eta_i x_2, \quad x_4 = -\eta_i(x_1 + x_2), \quad x_5 = \eta_i x_1 - x_2.$$

A behelyettesítés mutatja, hogy bármely (13) értékrendszer kielégíti az adott egyenletrendszert.

Összefoglalva: ha az y paraméter értéke különbözik 2-től, η_1 -től és η_2 -től, akkor a rendszer egyetlen megoldása $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$;

ha $y = 2$, akkor minden $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = u$ értékrendszer megoldás (u tetszés szerinti szám);

ha pedig y olyan η számmal egyenlő, amelyre $\eta^2 + \eta - 1 = 0$, akkor minden olyan

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = -u + \eta v, \quad x_4 = -\eta(u + v), \quad x_5 = \eta u - v$$

értékrendszer megoldás, melyben u, v tetszés szerinti számok (ez természetesen $v = u$ esetén is különbözik az $y = 2$ esettől).

Draskovits Pál (Budapest, Vörösmarty M. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Néhányan túlzott óvatosságból a (11) egyenlet előállítás után külön tárgyalták az $y = 1$ esetet. Erre nem volt szükség, mert (11) ekkor is következménye (7a)-nak és (8a)-nak (ekvivalens (7a)-val), erre a kiadódott megoldás (ti. minden $x_i = 0$) szintén felhívhatta volna a figyelmet.