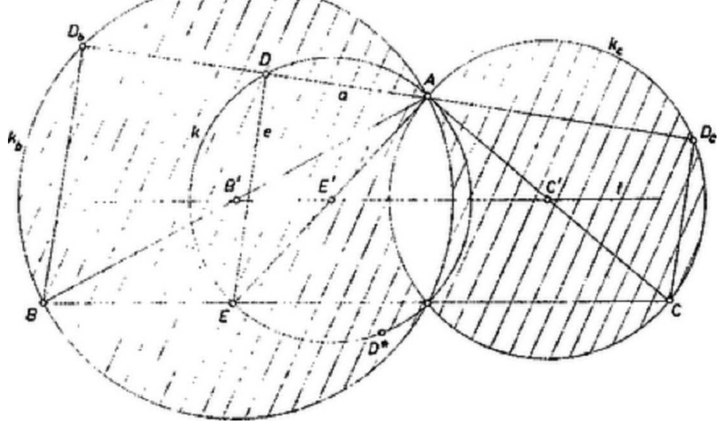
Legyen egy az előírásnak megfelelő derékszög csúcsa D, A-n átmenő szára a, másik szára e, és ennek a BC szakaszon lévő pontja E. E-t rögzítve és D-t mozgatva D-ből az AE szakasz mindig derékszögben látszik, ezért D rajta van az AE átmérő fölötti g Thalész-gömb felületén. Fordítva, g felületének bármely D pontját véve az ADE szög derékszög.[1] Megfelel D gyanánt A és E is, mert ekkor a, ill. e gyanánt vehetünk bármely AE-re merőleges, A-n, ill. E-n átmenő egyenest. Eszerint rögzített E esetén a mértani hely: g felülete.

Végigtolva E-t a BC szakaszon, minden helyzetéhez tartozik egy g gömbfelület. Mindezek pontjainak H összessége alkotja a keresett mértani helyet, mert e pontok mind megfelelnek, más pont viszont nem felel meg. Ezt az összességet szemléletesebben fogjuk meghatározni.



A g gömbök középpontjainak mértani helye a $B'C'$ szakasz, ahol B' az AB, C' pedig az AC szakasz felezőpontja. Nyilvánvaló ugyanis, hogy E minden helyzetében az AE átmérő E' felezőpontja a $B'C'$ szakaszon van, és fordítva, a $B'C'$ szakasz minden E' pontjához tartozik g, mert A-nak E'-re való tükörképe rajta van a BC szakaszon.

Ha A nincs rajta a BC egyenesen, akkor $B'C'$ az ABC háromszög középvonala; eddigi megállapításaink azonban a BC egyenesen lévő A pont esetében is érvényesek, ugyanez áll a továbbiakra is. Így a $B'C' = t$ egyenes a H mértani helynek tengelye, e körül forgatva önmagába megy át, miután ez mindegyik g gömbre külön is igaz. Elegendő tehát megállapítanunk H és bármely a t-n átmenő S sík közös pontjainak h halmazát, ezt t körül körülforgatva megkapjuk H-t. Ha A rajta van a BC egyenesen, akkor t azonos BC-vel, bármely S egyformán megfelelő; ha nincs rajta, akkor S gyanánt az ABC síkot célszerű venni, így a feladatot egyelőre síkra szorítkozva oldjuk meg, hiszen D, E és velük a derékszög is benne van S-ben.

S minden g-ből egy legnagyobb kört metsz ki, amely átmegy A-n, és amelynek középpontja a $B'C'$ szakaszon van. E körök kerületi pontjainak összessége adja h-t. E kör két szélső helyzete a B' és C' középpont körüli k_b, ill. k_c kör. Megrajzolva bármely olyan kört, amely átmegy A-n és középpontja a $B'C'$ szakaszon van, azt látjuk, hogy a kör benne halad a k_b és k_c által lefedett síkrészben, de nincs pontja k_b és k_c belsejének közös részében. Bebizonyítjuk, hogy h-t azok és csak azok a pontok alkotják, amelyek 1) k_b és k_c kerületén vannak, 2) e körök egyikére nézve belső, másikára nézve külső pontok.

k_b és k_c kerületi pontjaira állításunk nyilvánvaló. Legyen most D pl. a k_b belsejének egy a k_c-n kívül levő pontja.

Be kell látnunk, hogy megrajzolva a D-n és A-n átmenő k kört, melynek középpontja t-n van, k-nak az A-val átellenes E pontja a BC szakasz belsejében van, tehát az EDA derékszög megfelel a feltételnek. Messe az AD egyenes k_b-t és k_c-t másodszor D_b-ben ill. D_c-ben (az utóbbi azonos A-val, ha DA érinti k_c-t), és tekintsük a D, D_b, D_c pontok sorrendjét. Feltevésünk szerint D közte van A-nak és D_b-nek, viszont nincs közte A-nak és D_c-nek. Így D mindenesetre D_b és D_c között van, akár belül van A a D_bD_c szakaszon, akár kívül (az ábrán D, ill. D^* vezet ezen kétféle helyzetre). Másrészt a D_bB, DE és D_cC egyenesek párhuzamosak, mert Thalész tétele szerint mindegyik merőleges AD-re. Így DE a D_bB és D_cC között fekszik, E pedig valóban B és C között van. Ezek szerint D hozzátartozik h-hoz.

Legyen másrészt ADE egy tetszés szerinti derékszög, ahol E a BC szakasz egy belső pontja. A B-ből és C-ből AD-re bocsátott merőleges talppontja legyen D_b és D_c, ekkor BD_b, CD_c és ED párhuzamosak, mert mindegyik merőleges AD-re, és D a D_b és D_c közt van, mert E a B és C közé esik. Ekkor azonban D az AD_b és AD_c szakaszok egyikén rajta van, a másikon nincs (akár D_b és D_c köré esik A, akár nem). Így D a k_b és k_c körök egyikének belsejében van, a másikon kívül.

Visszatérve a térbeli feladatra, a t körül való forgatással k_b és k_c az AB, ill. AC átmérő fölötti g_b, ill. g_c gömbfelületet írja le k_b és k_c belső pontjai – és S-nek csakis ezek a pontjai – a megfelelő gömb belső pontjain haladnak át, így a mondottak szerint *a keresett H mértani helyet g_b és g_c felületi pontjai alkotják, továbbá azok a pontok, amelyek e gömbfelületek egyikére nézve belső, másikára nézve külső pontok.* Ez a megállapítás érvényes akkor is, ha A a BC egyenesen van, sőt egybe is eshet B-vel vagy C-vel, az utóbbi esetben a megfelelő gömbfelület egy pontra zsugorodik

[1] Lásd 769.gyakorlat, K. M. L. 26 (1963) 66. o.

össze. Más szóval: H-t g_b és g_c felületi és belső pontjai alkotják, kivéve a két gömb belseje közös részének pontjait – amennyiben ilyen közös rész létezik.

Szép András (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)