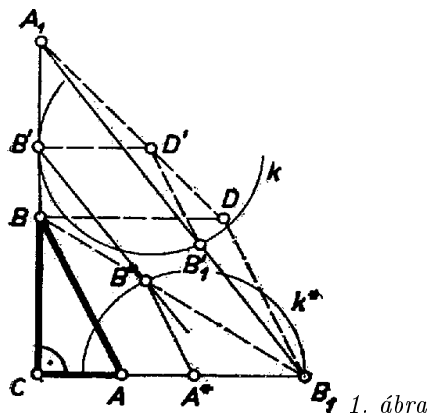
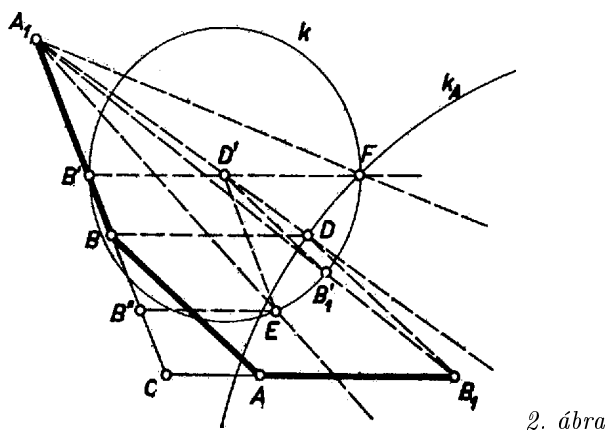


I. megoldás. Legyen ABC a keresett háromszög, $a = BC$, $b = AC$ a befogók, $c = AB$ az átfogó. Mérjük rá a befogók meghosszabbítására az $AB_1 = BA_1 = c$ távolságát (1. ábra). Ekkor az $A_1B_1C\Delta$ befogói $A_1C = a + c = p$, $B_1C = b + c = q$ a megadott távolságok. Így a feladatot a következővé alakítottuk át: Szerkesszük meg adott $A_1B_1C\Delta$ A_1C és B_1C oldalán a B és A pontot úgy, hogy az A_1BAB_1 törött vonal egyenlő szakaszokból álljon. Ez a feladat többféleképpen is megoldható.



a) A B -ből AB_1 -gyel és B_1 -ből AB -vel párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja legyen D , ekkor az A_1BDB_1 törött vonal is egyenlő szakaszokból áll, és első két szakasza A_1C -vel és CB_1 -gyel párhuzamos. Ehhez hasonlóan a szerkeszthetünk úgy, hogy A_1C -re A_1 -ből tetszés szerinti A_1B' távolságot mérünk; B' -ből A_1C -re merőlegesen annak B_1 -et tartalmazó partján felmérjük a $B'D' = A_1B'$ távolságot; a D' körül $D'B'$ sugárral rajzolt körnek az A_1 -től távolabbi metszéspontja A_1B_1 -gyel legyen B'_1 . D -t az A_1D' és a B_1 -ből induló, B'_1D' -vel párhuzamos egyenes metszéspontja adja; végül B -t a D -n át B_1C -vel párhuzamosan húzott egyenes metszi ki A_1C -ből, A -t pedig a B_1 középpontú B_1D sugarú kör a B_1C szakaszból.

Világos, hogy a megszerkesztett törött vonal egyenlő szakaszokból áll, s így az $ABC\Delta$ megfelel a feladat kirovásainak, feltéve, hogy A és B a CB_1 és CA_1 oldalon keletkezik. A szerkesztés változatlanul végrehajtható, ha a C -nél levő γ szög adott, de derékszögtől különböző (2. ábra). Nem alkalmazható, ha D (és D') az A_1B_1 egyenesre esik, azaz ha az $A_1B_1C\Delta$ egyenlő szárú, $p = q$. Ekkor azonban az $ABDB_1$ rombusz átlója, amely felezi az AB_1D szöget, egyben az A_1B_1C szög felezője is, tehát ez metszi ki B -t A_1C -ből, továbbá ez esetben $AB \parallel A_1B_1$.



A $D'B'_1$ -vel párhuzamos BA irány az A_1C és CB_1 irány közé esik; így B'_1 -nek az ezekkel párhuzamos sugarak alkotta $ED'F$ konvex (B' -t nem tartalmazó) szögtartományban kell lennie, akkor keletkezik A és B a megfelelő oldalszakaszokon. Jelöljük az E -ből B_1C -vel párhuzamosan húzott egyenes és A_1C metszéspontját B'' -vel. Ekkor a mondott feltétel azzal ekvivalens (mivel B'_1 az A_1B_1 egyenesen van), hogy $p/q = A_1C/B_1C$ az $A_1B'/B'F = 1/2$ és $A_1B''/B''E = 2$ értékek közé essék (ugyanis $A_1B'' = A_1B' + B'B'' = A_1B' + D'E = 2A_1B'$). A szerkeszthetőség feltétele tehát, hogy $q/2 < p < 2q$ legyen, más szóval az adott szakaszok közül, ha nem egyenlők, a nagyobbik kisebb legyen a kisebbik kétszeresénél.

b) Az előbbi megoldás jelöléseit megtartva, de nem szorítkozva derékszögű háromszögre $A_1D = 2A_1B \sin(\gamma/2) = 2B_1D \sin(\gamma/2)$. A D pont A_1 -től és B_1 -től mért távolságának aránya eszerint $2 \sin(\gamma/2)$, D tehát az ennek megfelelő Apollóniosz-féle kör és az A_1 -ből induló, A_1C -vel $90^\circ - \gamma/2$ szöget bezáró félegyenes metszéspontja. Tovább az előző megoldáshoz hasonlóan járhatunk el.

$\gamma = 60^\circ$ esetében az Apollóniosz-kör helyébe a B_1A_1 szakasz felező merőlegese lép.

III. megoldás. A következő megoldás bonyolultabb az előzőknél, viszont még hasonlóságot sem használ fel. Tükörözzük a keresett $ABC\Delta$ -et az A és a B csúcsnál levő külső szög felezőjére, és legyen a tükörkép AA_1C' , ill. B_1BC'' (4. ábra). Az A_1 csúcs CA , B_1 pedig CB meghosszabbításán van, $CA_1 = CA + AB = b + c = q$, $CB_1 = a + c = p$, továbbá C' és C'' az AB meghosszabbításain vannak, $A_1C'C''\sphericalangle = B_1C''C'\sphericalangle = A_1CB_1\sphericalangle = \gamma$, és $C''B_1 = CA = b$. Messe az A_1 -en átmenő, AB -vel párhuzamos egyenes $C''B_1$ -et B^* -ban. Így $A_1B^*C''C'$ szimmetrikus trapéz, $C''B^* = C'A_1 = CB = a$, $B^*B_1 = C''B_1 - C''B^* = b - a = q - p = CA_1 - CB_1$ végül $A_1B^*B_1\sphericalangle = C'C''B_1\sphericalangle = \gamma$. A $q > p$ (vagyis $b > a$) feltevés miatt A_1B^* elválasztja B_1 -et C'' -től, és így C -től is, ezért B^* az $A_1B_1C\Delta$ köré írt k körnek C -t tartalmazó A_1B_1 ívén van.

Ezek alapján az $ABC\Delta$ megszerkesztése a következő.

Egy C csúcsú, γ nagyságú szög száraitra fölmérjük $CA_1 = CA^* = q$ szakaszt, a második szárra $CB_1 = p$ -t is. Megrajzoljuk k -t, és ennek mondott ívét metsszük a B_1 körüli, $B_1A^* = q - p$ sugarú k^* körrel, a metszéspont B^* . Az $A_1B_1B^*\Delta$ B^* -ból kiinduló külső szögfelezője CB_1 -ből kimetszi B -t, végül a B -n átmenő, A_1B^* -gal párhuzamos egyenes CA_1 -ből A -t.

Az $ABC\Delta$ megfelel a követelményeknek. Legyen AB és B_1B^* metszéspontja C'' , továbbá C' az AB -nek A -n túli meghosszabbításán az a pont, amelyre $A_1C'A\sphericalangle = \gamma$. Ugyanekkora a $B_1B^*A_1\sphericalangle$ és a vele egyállású $B_1C''B\sphericalangle$, ezért, valamint az A -nál és B -nél levő csúcsszögek miatt az ABC , AA_1C' és B_1BC'' háromszögek két-két megfelelő szöge egyenlő. Az utóbbi két háromszög egybevágó, mert ezeken felül egy-egy megfelelő oldaluk egyenlő, ugyanis a végzett szerkesztések miatt B^*BC'' egyenlő szárú háromszög, $A_1B^*C''C'$ pedig egyenlő szárú trapéz, így valóban $A_1C' = B^*C'' = BC''$. Eszerint $AA_1 = B_1B$. Egyenlő továbbá az előbbi első és utolsó háromszög két-két megfelelő oldalának különbsége:

$$\begin{aligned} CA - CB &= CA_1 - AA_1 - CA^* + BA^* = BB_1 + B_1A^* - AA_1 = \\ &= B_1B^* = B_1C'' - B^*C'' = B_1C'' - BC'', \end{aligned}$$

eszerint $ABC\Delta \simeq B_1BC''\Delta \simeq AA_1C'\Delta$. Ennélfogva az $ABC\Delta$ -ben

$$\begin{aligned} CA + AB &= CA + AA_1 = CA_1 = q, \\ CB + BA &= CB + BB_1 = CB_1 = p, \end{aligned}$$

végül az $ACB\sphericalangle$ az előírt γ nagyságú. Ezeket kellett bizonyítanunk.

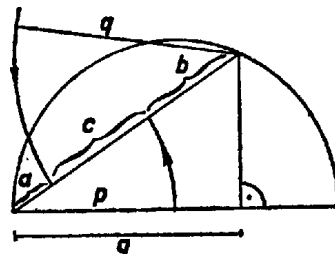
A felhasznált B^*B szögfelező k -ból a C -t tartalmazó A_1B_1 ív F felezőpontján át lép ki, másrészt $q > p$ miatt F a mondott ív CA_1 rész-ívén van. Ezért B akkor és csak akkor adódik a CB_1 szakasz belsejében, ha B^* a B_1C íven adódott. Ennek feltétele $B_1B^* < B_1C$, $q - p < p$, azaz $p < q < 2p$. Ekkor A a CA_1 szakaszon adódik, mert az AB egyenes elválasztja C -t A_1B^* -től.

Ebben a szerkesztésben sem használtuk ki, hogy γ derékszög. Ha $\gamma = 90^\circ$, akkor $A_1B^* = C'C'' = a + b + c$.

Mezey István (Debrecen, Fazekas M. G.)

Megjegyzés. $p = q$ esetén a szerkesztés nem alkalmazható, mert $B^* = B_1$.

IV. megoldás. Könnyen célhoz érhetünk számítás segítségül vételével. A $c + a = p$, $c + b = q$, $a^2 + b^2 = c^2$ egyenletrendszerből $c = p + q - \sqrt{2pq}$ (a másodfokú egyenlet másik gyöke nem felel meg, mert $p + q = c + (a + b + c) > c$). Eszerint $b = \sqrt{2pq} - p$, vagyis $2p$ és q mértani középárányosából p -t kivonva a b befogót, q kivonásával a -t kapjuk. A kapott eredmény $b + p = a + b + c = \sqrt{2pq}$ alakban is írható, ezért a kivonásokat a mértani középpel egyenlő szakasz két vége felől végezve, középső szakaszként megjelenik az átfogó (5. ábra).



5. ábra

Radó András (Győr, Benedek-rendi Czuczor G. G.)

Megjegyzések. 1. A szerkesztés átvihető tetszés szerinti γ szögre, Pythagoras tételét a koszinusz-tétellel helyettesítve.

2. Az utoljára nyert összefüggés szerint derékszögű háromszög oldalaira mindig fennáll:

$$(a + b + c)^2 = 2(a + c)(b + c),$$

ahol c az átfogó. Hasonlóan

$$\begin{aligned} (a + c)^2 + (b + c)^2 + (a + b + c)^2 &= \\ &= [(a + c) + (b + c)]^2. \end{aligned}$$

A III. megoldásnak derékszögű háromszögre való alkalmazása az

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 + (b-a)^2 &= (a+b+c)^2 + [(b+c) - (a+c)]^2 = \\ &= (a+c)^2 + (b+c)^2\end{aligned}$$

azonossággal egyértelmű. Ezek az összefüggések egy-egy lehetőséget adnak $a+b+c$ megszerkesztésére, abból pedig a , b és c már könnyen nyerhető.