

I. Jelöljük egy tetszőleges 3-jegyű szám jegyeit A, B, C -vel, ekkor $S = A + B + C$. Legyen először $1 \leq S \leq 9$. Egy ilyen S -érték mellett A lehetséges értékei $1, 2, \dots, S$ és A -t rögzítve B a 0-tól $S - A$ -ig terjedő egészek bármelyike lehet, hiszen $S - A \leq 9 - 1 = 8$, és a C -re ebből egyértelműen meghatározott $S - A - B$ érték is 0 és 8 közt van. Így adott A -val $S - A + 1$ számot, azaz A növekvő értékei mellett sorra $S, S - 1, S - 2, \dots, 2, 1$ számot kapunk. A vizsgált esetben tehát azoknak a 3-jegyű számoknak a száma, amelyekben a számjegyek összege S :

$$(1) \quad f(S) = S + (S - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{S(S + 1)}{2},$$

az állítás első részének megfelelően.

II. Könnyen visszavezethetjük az előbbire a 19 és 27 közé eső jegyösszegek esetét. Egy ide tartozó $\overline{ABC}$ számhoz (amelyre tehát

$$19 \leq A + B + C = S \leq 27, \quad 1 \leq A \leq 9, \quad 0 \leq B, \quad C \leq 9)$$

képezzük az

$$(2) \quad A' = 10 - A, \quad B' = 9 - B, \quad C' = 9 - C$$

jegyekkel felírt számot. Erre egyrészt

$$9 \geq A' \geq 1, \quad 9 \geq B', \quad C' \geq 0,$$

vagyis $\overline{A'B'C'}$ a figyelembe vett számok közül való, másrészt $S' = A' + B' + C' = 28 - S$, tehát $9 \geq S' \geq 1$.

$\overline{A'B'C'}$ -höz az $A = 10 - A', B = 9 - B', C = 9 - C'$ képletek alapján (vagyis lényegében ismét (2) szerint) határozhatjuk meg azt a számot, amelyhez hozzárendeltük.

Ezek szerint $19 \leq S \leq 27$ -re ugyanannyi 3-jegyű szám van, amelyben a számjegyek összege S , mint ahány 3-jegyű szám van $S' = 28 - S$ számjegyösszeggel, vagyis

$$f(S) = \frac{(28 - S)(29 - S)}{2} = \frac{S^2 - 57S + 812}{2},$$

az állítás harmadik részének megfelelően.

III. Legyen végül $10 \leq S \leq 18$. Ekkor A 1-től 9-ig minden értéket felvehet, és ha A értéket rögzítettük, és $B + C = S - A \leq 9$, akkor a B, C jegyekre végződő számok száma az I. esethez hasonlóan $B + C + 1 = S + 1 - A$. Ez áll A -nak $S - 9$ -től 9-ig terjedő értékeire, ezért az összes ilyen számok számát a következő számtani sor adja:

$$(3) \quad \begin{aligned} & [(S + 1) - (S - 9)] + [(S + 1) - (S - 8)] + \dots + [(S + 1) - 9] = \\ & = \frac{1}{2}(19 - S)[2(S + 1) - S] = \frac{1}{2}(19 - S)(2 + S). \end{aligned}$$

Ha viszont $B + C = S - A > 9$, akkor B lehetséges értékeinek számát megkapjuk úgy, hogy a fent használt $B + C + 1 = S + 1 - A$ számból kivonjuk az olyan értékek számát, amelyekre $B > 9$, vagy $C > 9$. Az előbbiek száma is, az utóbbiaké is $(S + 1 - A) - 10 = S - 9 - A$, tehát B lehetséges értékeinek száma $(S + 1 - A) - 2(S - 9 - A) = 19 - S + A$ (ugyanis $B > 9$ és $C > 9$ egyidejűleg lehetetlen, mert $S > 19$ -re vezet). Ez áll A -nak $S - 9$ -nél kisebb értékeire, 1, 2, ..., $S - 10$ -re, ezért az ilyen $\overline{ABC}$ számok együttes száma

$$(4) \quad \begin{aligned} & [(19 - S) + 1] + [(19 - S) + 2] + \dots + [(19 - S) + (S - 10)] = \\ & = \frac{1}{2}(S - 10)(38 - 2S + S - 9) = \frac{1}{2}(S - 10)(29 - S). \end{aligned}$$

Ezek szerint adott, 10 és 18 közti S esetén az S számjegyösszeget adó háromjegyű számok száma (3)-ból és (4)-ből összeadással

$$\frac{1}{2}[(38 + 17S - S^2) + (-290 + 39S - S^2)] = -S^2 + 28S - 126.$$

Ezzel az állítást S mindhárom részintervallumára igazoltuk.

Dénes Endre (Nagykőrös, Arany J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében ugyanígy jártak el – de sokkal több munkát végeztek –, akik felírták egy táblázat egymás utáni soraiba azoknak a számoknak a számát, amelyek első jegye egy adott érték (1-től 9-ig) és a számjegyek összege rendre 1, 2, ..., 27. Ekkor az S -edik oszlopban levő számok összege $f(S)$. A táblázat szabályosságainak megfigyeléséből jutottak el azután a feladat állításának bizonyításához.