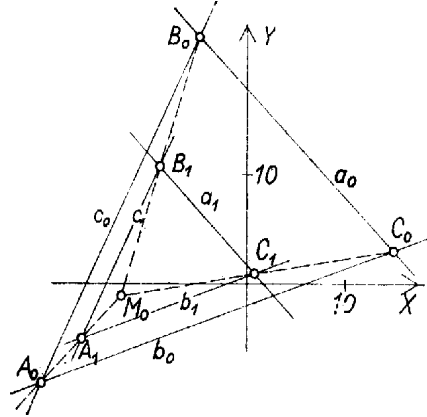


I. A leírt grafikus eljárás során a következő metszéspontokat találjuk (1. ábra):

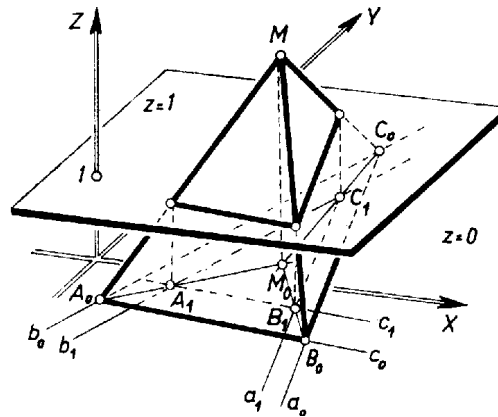
$$\begin{aligned} C_0(15; 3), \quad A_0(-21; -9), \quad B_0(-5; 23); \\ C_1(1; 1), \quad A_1(-17; -5), \quad B_1(-9; 11), \end{aligned}$$

és a  $C_0C_1$ ,  $A_0A_1$  és  $B_0B_1$  egyenesek valóban egy pontban metszik egymást, az  $M_0(-13; -1)$  pontban. Ez megfelel az állításnak, és a leírt eljárással bármelyik egyenletből a  $z = 2$  értéket kapjuk.



1. ábra

II. Felhasználva a megengedett tételeket,<sup>1</sup> a következő elgondolás adódik egy három egyenletből álló, háromismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszer megoldásának megkeresésére. Állítsuk elő mindhárom egyenlethez a hozzátartozó síkot az  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  tengelyekkel meghatározott térbeli derékszögű koordinátarendszerben.<sup>2</sup> Két ilyen sík általában egy egyenesben metszi egymást, a metszésvonal pontjainak koordinátái a megfelelő két egyenlet mindegyikét kielégítik, és ez a tulajdonsága csak a metszésvonal pontjainak van meg. A harmadik sík ezt a metszésvonalat általában egy pontban metszi (3. ábra), ennek és csak ennek a pontnak a koordinátái mind a három egyenletet kielégítik, vagyis a három sík egyetlen közös pontjának koordinátái a rendszer megoldását adják. – A három sík közös pontján mindhárom síkpár metszésvonala átmegy<sup>3</sup>.

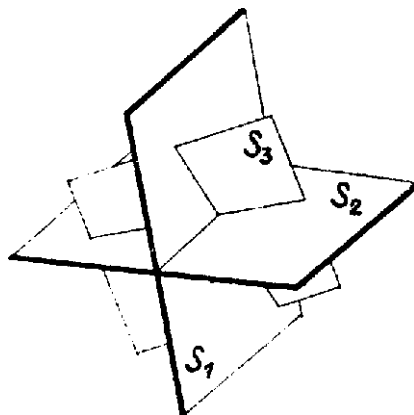


2. ábra

<sup>1</sup> Az eredeti kitűzés megengedte néhány tétel bizonyítás nélkül való felhasználását.

<sup>2</sup> Az az állítás, hogy az  $S_1$  sík pl. az (1) egyenlet képe, és fordítva, hogy  $S_1$  egyenlete (1), a síkbeli megfelelő kapcsolatokhoz hasonlóan azt jelenti, hogy minden az egyenletet kielégítő  $x$ ,  $y$ ,  $z$  számhármassal mint koordinátákkal meghatározott pont rajta van  $S_1$ -en, és fordítva,  $S_1$  minden pontjának  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordinátái kielégítik az egyenletet.

<sup>3</sup> Ha a három síknak nincs közös pontja, mert a harmadik sík párhuzamos az első kettő metszésvonalával, esetleg a síkok egyikével is, vagy mert mindhárom sík párhuzamos, és így bármelyik kettőjüknek nincs metszésvonala, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, a rendszer ellentmondást tartalmaz, ezen az úton sem oldható meg. Ha pedig a három síknak több közös pontja van, mert pl.  $S_3$  tartalmazza  $S_1$  és  $S_2$  metszésvonalát, vagy két sík, vagy mindhárom sík egybeesik, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, tehát nincs határozott megoldása. Két egyenlet képe ugyanaz a sík, ha van olyan állandó, amellyel pl. az első egyenletet megszorozva a másodikat kapjuk. – Könnyen belátható, hogy a 3. – 7. ábrák feltüntetik 3 különböző sík kölcsönös helyzeteinek minden lehetséges típusát.

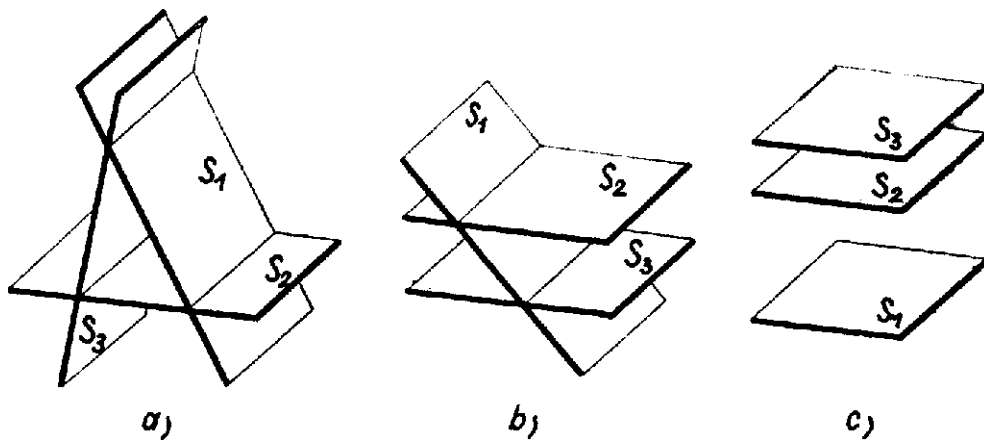


3. ábra

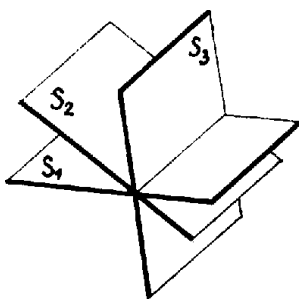
A vizsgált eljárás az adott egyenletrendszer esetére az elgondolt térbeli alakzat vetületét szerkeszti meg az  $XY$  síkon. Ugyanis az  $a_0$  egyenes az (1)-et ábrázoló  $S_1$  síknak az  $XY$  síkkal való metszésvonala, hiszen  $z = 0$  az  $XY$  sík egyenlete, rajzunk  $R$  síkjáé. Hasonlóan  $b_0$ ,  $c_0$  a (2), ill. (3) egyenletű  $S_2$ , ill.  $S_3$  síknak  $R$ -rel való metszésvonala.  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  és  $R$  egy  $A_0B_0C_0M$  háromoldalú gúla lapsíkjai, az  $A_0B_0C_0$  háromszög a gúla alaplapja, pl.  $C_0$  az  $S_1$ ,  $S_2$  és  $R$  közös pontja (2. ábra).

Továbbmenve a  $z = 1$  sík párhuzamos a  $z = 0$  síkkal, ezért gúlánk oldallapsíkjait egy-egy az  $a_0$ ,  $b_0$ , ill.  $c_0$  egyenessel párhuzamos egyenesben metszi, ezek páronkénti metszéspontjai a gúla oldaléleinek a  $z = 1$  síkkal való metszéspontjai. Az  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  egyeneseknek ugyanazon síkbeli koordinátarendszerbe való berajzolásával, és páronkénti  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  metszéspontjaik megjelölésével éppen a mondott metszésvonalaknak és metszéspontoknak  $R$ -en való merőleges vetületét állítjuk elő, ugyanis ilyen vetítésnél az első két koordináta változatlanul marad. Eszerint az  $A_0A_1$ ,  $B_0B_1$ ,  $C_0C_1$  egyenesek a gúla oldaléleinek  $R$ -en levő vetületei, ezért mindhárom átmege a gúla  $M$  főcsúcsának  $R$ -en levő merőleges vetületén. Ezért közös  $M_0$  pontjuk az  $M$  vetülete, és így  $M_0$  két koordinátája valóban egyezik  $M$  első két koordinátájával, az egyenletrendszer megoldásából  $x$  és  $y$  értékével.

Ezek szerint a leírt eljárás helyes, és pedig nemcsak az (1)–(3) rendszer esetében, hanem minden olyan egyenletrendszer esetében, amelyben a felhasznált  $a_0$ ,  $b_0$ , ...,  $c_1$  előkészítő egyenesek, az  $A_0$ ,  $B_0$ , ...,  $C_1$  előkészítő pontok és az  $M_0$  pont létrejön.

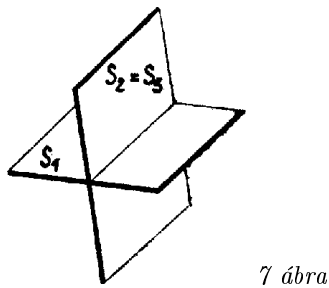
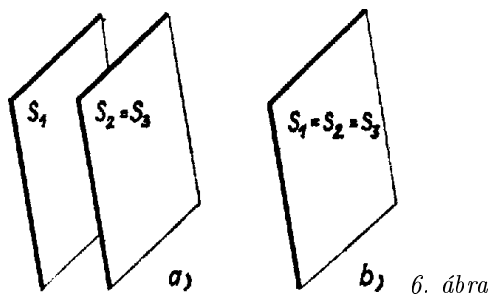


4. ábra



5. ábra

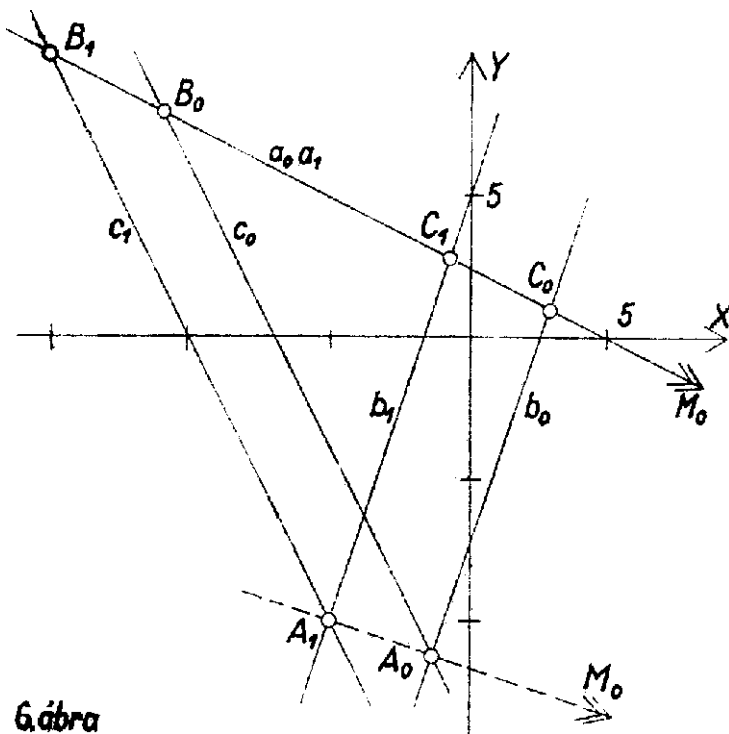
**III.** Előfordulhat, hogy valamelyik pont vagy egyenes nem jön létre. Ilyenkor lehet, hogy nincs megoldása az egyenletrendszernek, de lehet az is, hogy egyszerűsödik a leírt eljárás. Ezt néhány példán illusztráljuk, megjegyezve, hogy a 3–7. ábrákon látható összes helyzetekhez van olyan egyenletrendszer, amelynek egyenleteit ilyen síkok ábrázolják, és hogy további speciális esetekre vezet az, ha egyes síkok vagy egyenesek párhuzamosak az ábrázolás síkjával, vagy merőlegesek rá.

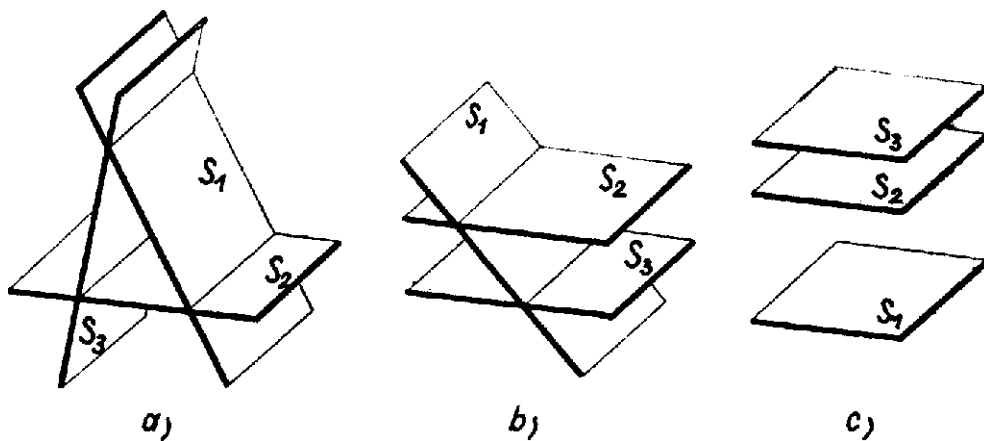


1. A következő rendszer első egyenletében  $z$  együtthatója 0:

$$x + 2y = 5, \quad 3x - y + 12z = 7, \quad 2x + y + 6z = -14,$$

így  $a_0, a_1, B_0B_1$  és  $C_0C_1$  egybeesik, de  $A_0A_1$  kimetszi belőle  $M_0$ -t (8. ábra,  $M_0$  messze kiesik). A rendszernek van határozott megoldása; a síkok kölcsönös helyzete olyan típusú, mint a 3. ábrán,  $S_1$  merőleges  $R$ -re.





9. ábra

2. Az alábbi rendszer esetében  $b_0$  és  $c_0$  párhuzamosak:

$$3x + 2y + 2z = 0, \quad 2x + 3y + 2z = 3, \quad 4x + 6y + 5z = 8,5.$$

$A_0$  és  $A_1$  nem jön létre, de  $B_0B_1$  és  $C_0C_1$  metszéspontja létrejön, van határozott megoldás (5. és 3. ábra,  $S_2$  és  $S_3$  metszésvonala párhuzamos  $R$ -rel).

3. A legutóbbi rendszer 3. egyenletében  $5z$  helyére  $4z$ -t írva  $c_0$  és  $c_1$  távolsága egyenlőnek adódik  $b_0$  és  $b_1$  távolságával, és  $c_1$  ugyanazon irányú eltolással jön létre  $c_0$ -ból, mint  $b_1$  a  $b_0$ -ból, így  $B_0B_1C_1C_0$  paralelogramma (a 7. ábrán  $C'_1$ ,  $B'_1$ , a többi változatlan). A rendszer ellentmondó,  $S_3$  párhuzamos  $S_2$ -vel.

A következők dolgozataiból összeállítva, kiegészítésekkel

*Gecsey László* (Budapest, József A. g.)

*Nagy Klára* (Makó, József A. g.)

*Treer Mária* (Budapest, Kaffka M. g.)

*Mátrai Miklós* (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g.)