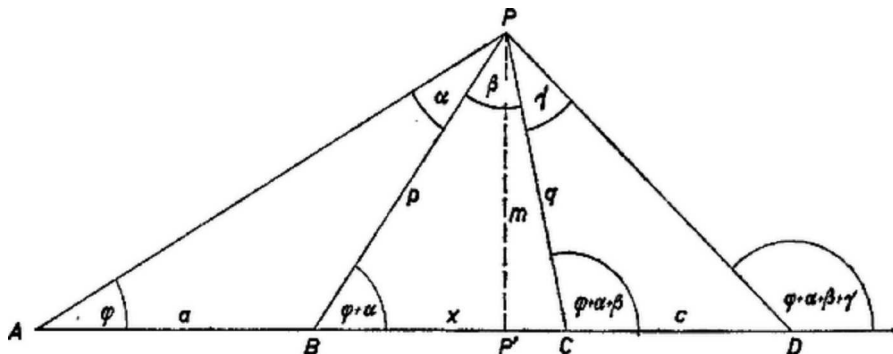


I. megoldás. Először a $PAD = \varphi$ szöveget számítjuk ki. Vezessük be a következő jelöléseket: $AB = a$, $BC = x$, $CD = c$; P -ből mért látószögük rendre α , β , γ , $\alpha + \beta + \gamma = \delta$, továbbá $PB = p$ és $PC = q$. Ezekkel a PAB , PBC , PCD háromszögből a szinusz-tétel alapján

$$(1) \quad \frac{a}{p} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}, \quad \frac{p}{q} = \frac{\sin(\varphi + \alpha + \beta)}{\sin(\varphi + \alpha)}, \quad \frac{q}{c} = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin \gamma}.$$



A három egyenlőség bal, ill. jobb oldalainak összeszorzásával adódó egyenletből p és q kiesik, a fellépő adatok közül csak φ ismeretlen. Más szóval: egyismeretlenes egyenletet kapunk φ -re:

$$(2) \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha \sin(\varphi + \alpha + \beta) \sin(\varphi + \delta)}{\sin \gamma \sin \varphi \sin(\varphi + \alpha)},$$

amiből

$$\frac{\sin(\varphi + \alpha + \beta) \sin(\varphi + \delta)}{\sin \varphi \sin(\varphi + \alpha)} = \frac{a \sin \gamma}{c \sin \alpha} = k,$$

ismert szám. Szokásos rendezéssel és az addíció-tétel alkalmazásával minden tagban fellép $\sin^2 \varphi$, $\sin \varphi \cos \varphi$ és $\cos^2 \varphi$ egyike:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi \cos(\alpha + \beta) \cos \delta + \sin \varphi \cos \varphi [\cos(\alpha + \beta) \sin \delta + \sin(\alpha + \beta) \cos \delta] + \\ + \cos^2 \varphi \sin(\alpha + \beta) \sin \delta = k \sin^2 \varphi \cos \alpha + k \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha. \end{aligned}$$

A szögletes zárójelben $\sin(\delta + \alpha + \beta) = \sin(2\delta - \gamma)$ áll, így

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \sin \delta \cos^2 \varphi + [\sin(2\delta - \gamma) - k \sin \alpha] \cos \varphi \sin \varphi + \\ + [\cos(\alpha + \beta) \cos \delta - k \cos \alpha] \sin^2 \varphi = 0. \end{aligned}$$

Innen $\sin^2 \varphi$ -vel osztva ($\sin \varphi \neq 0$, mert P nincs az AD egyenesen) $\operatorname{ctg} \varphi$ -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi + m \operatorname{ctg} \varphi + n = 0,$$

ahol

$$m = \frac{\sin(2\delta - \gamma) - k \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \sin \delta}, \quad n = \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos \delta - k \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \sin \delta}.$$

Mármost a PBC háromszögből

$$\frac{x}{p} = \frac{\sin \beta}{\sin(\varphi + \alpha + \beta)}.$$

Ehhez (1) első egyenletét hozzávéve p kiküszöbölésével

$$x = \frac{a \sin \beta \sin \varphi}{\sin \alpha \sin(\varphi + \alpha + \beta)}.$$

Numerikusan $k = 1,603$, $b = 106,9^\circ$, $2\delta - \gamma = 180,9^\circ$, $m = -0,7730$, $n = -1,658$, így $\operatorname{ctg} \varphi$ két értéke $-0,958$ és $1,731$. Ezekből $\varphi = 133,77^\circ$, ill. $30,02^\circ$, az előbbivel azonban a PBC háromszög szögeinek összege nagyobb lenne 180° -nál, ez tehát nem megfelelő. φ utóbbi értékével pedig $x = BC = 109,5$ m.

Székely Gábor (Budapest, Madách I. g. II. o. t.)

Megjegyzés: Kaphatunk (2)-ből 2φ szögfüggvényeire is egyenletet a törtek eltávolításával és a $2 \sin u \sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v)$ azonosság alkalmazásával:

$$a \sin \gamma [\cos \alpha - \cos(2\varphi + \alpha)] = c \sin \alpha [\cos \gamma - \cos(2\varphi + 2\delta - \gamma)].$$

Innen az addíció-tétel alkalmazásával

$$J \cos 2\varphi + K \sin 2\varphi = L$$

alakú egyenletre jutunk. Láttuk az 1085. feladatban¹, hogy ennek megoldása:

$$\cos 2\varphi = \frac{JL \mp K\sqrt{J^2 + K^2 - L^2}}{J^2 + K^2}, \quad \sin 2\varphi = \frac{KL \pm J\sqrt{J^2 + K^2 - L^2}}{J^2 + K^2}.$$

A számítás kissé nehezkesebb a fenténél.

II. megoldás. Fejezzük ki p -t a PAB és PBD háromszögekből, q -t a PCD és PAC háromszögekből. A kifejezések egyenlőségéből:

$$(p =) \quad \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{(x + c) \sin(\varphi + \delta)}{\sin(\beta + \gamma)},$$

$$(q =) \quad \frac{c \sin(\varphi + \delta)}{\sin \gamma} = \frac{(x + a) \sin \varphi}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

A két egyenlőség bal, ill. jobb oldalait összeszorozva a φ -t tartalmazó tényezők kiesnek. A megmaradt adatok közül csak x ismeretlen, ez tehát az

$$(3) \quad (x + a)(x + c) = \frac{ac \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma} = M$$

egyenletből kiszámítható:

$$(4) \quad x^2 + (a + c)x - (M - ac) = 0,$$

$$x = BC = \frac{1}{2} \left[-(a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 + 4(M - ac)} \right].$$

Esetünkben $M > ac$, mert

$$0^\circ < \alpha < \alpha + \beta < 90^\circ, \quad \text{és így} \quad \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} > 1,$$

$$0^\circ < \gamma < \gamma + \beta < 90^\circ, \quad \text{és így} \quad \frac{\sin(\gamma + \beta)}{\sin \gamma} > 1,$$

és 1-nél nagyobb számok szorzata nagyobb 1-nél. Így (4) állandó tagja, vagyis a gyökök szorzata negatív, tehát a gyökök valósak, és egyikük negatív, másikuk pozitív. Csak az utóbbit használhatjuk, kiszámítva $x = 109,6$ m.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzések: 1. Hasonló egyenletre jutunk, ha kifejezzük a PAB , PBC , PCD és PAD háromszögek kétszeres területét egyrészt P -ből húzott közös PP' magasságukkal és az AD egyenesen levő alapjukkal, másrészt a P -ből kiinduló oldalakkal és a közbezárt szögekkel, és a nyert egyenlőségeket megfelelő oldalait összeszorozzuk. Így az

$$(5) \quad \frac{x(x + a + c)}{ac} = \frac{\sin \beta \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma}$$

egyenlet adódik.

Gálfi István (Budapest, Kandó K. hír. ip. t. III. o. t.)

2. (3) és (5) közvetlenül adódnak Papposz tételéből, amely szerint ha az egy S ponton átmenő t, u, v, w egyeneseket egy egyenes rendre a T, U, V, W pontokban metszi, akkor

$$\frac{TU}{UV} : \frac{TW}{WV} = \frac{\sin TSU \triangleleft}{\sin USV \triangleleft} : \frac{\sin TSW \triangleleft}{\sin WSV \triangleleft}.$$

Somogyi István (Ajka, Bródy I. g. II. o. t.)

¹K.M.L. 23 (1961/11) 131. o.