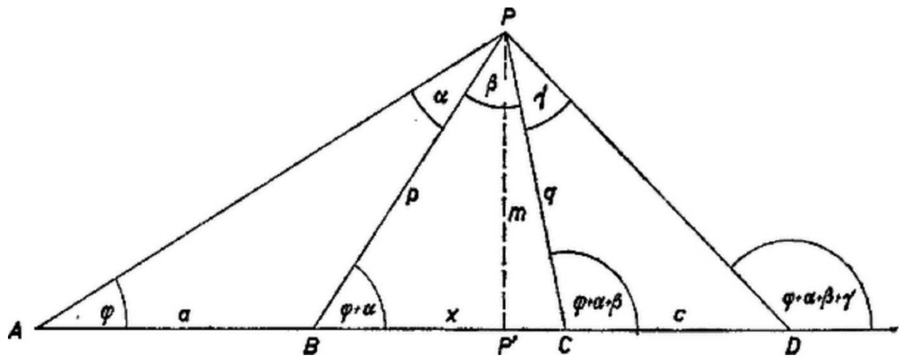
I. megoldás. Először a $PAD=\varphi$ szöget számítjuk ki. Vezessük be a következő jelöléseket: $AB=a$, $BC=x$, $CD=c$; P-ből mért látószögük rendre α, β, γ, $\alpha+\beta+\gamma=\delta$, továbbá $PB=p$ és $PC=q$. Ezekkel a PAB, PBC, PCD háromszögből a szinusz–tétel alapján

$$\frac{a}{p}=\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi},\quad \frac{p}{q}=\frac{\sin(\varphi+\alpha+\beta)}{\sin(\varphi+\alpha)},\quad \frac{q}{c}=\frac{\sin(\varphi+\delta)}{\sin\gamma}. \tag{1}$$



A három egyenlőség bal, ill. jobb oldalainak összeszorzásával adódó egyenletből p és q kiesik, a fellépő adatok közül csak φ ismeretlen. Más szóval: egyismeretlenes egyenletet kapunk φ-re:

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha\sin(\varphi+\alpha+\beta)\sin(\varphi+\delta)}{\sin\gamma\sin\varphi\sin(\varphi+\alpha)}, \tag{2}$$

amiből

$$\frac{\sin(\varphi+\alpha+\beta)\sin(\varphi+\delta)}{\sin\varphi\sin(\varphi+\alpha)}=\frac{a\sin\gamma}{c\sin\alpha}=k,$$

ismert szám. Szokásos rendezéssel és az addíció–tétel alkalmazásával minden tagban fellép $\sin^2\varphi$, $\sin\varphi\cos\varphi$ és $\cos^2\varphi$ egyike:

$$\sin^2\varphi\cos(\alpha+\beta)\cos\delta+\sin\varphi\cos\varphi\big[\cos(\alpha+\beta)\sin\delta+\sin(\alpha+\beta)\cos\delta\big]+$$
$$+\cos^2\varphi\sin(\alpha+\beta)\sin\delta=k\sin^2\varphi\cos\alpha+k\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha.$$

A szögletes zárójelben $\sin(\delta+\alpha+\beta)=\sin(2\delta-\gamma)$ áll, így

$$\sin(\alpha+\beta)\sin\delta\cos^2\varphi+\big[\sin(2\delta-\gamma)-k\sin\alpha\big]\cos\varphi\sin\varphi+$$
$$+\big[\cos(\alpha+\beta)\cos\delta-k\cos\alpha\big]\sin^2\varphi=0.$$

Innen $\sin^2\varphi$-vel osztva ($\sin\varphi\neq 0$, mert P nincs az AD egyenesen) $\operatorname{ctg}\varphi$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\operatorname{ctg}^2\varphi+m\operatorname{ctg}^2\varphi+n=0,$$

ahol

$$m=\frac{\sin(2\delta-\gamma)-k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\sin\delta},\qquad n=\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos\delta-k\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\sin\delta}.$$

Mármost a PBC háromszögből

$$\frac{x}{p}=\frac{\sin\beta}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)}.$$

Ehhez (1) első egyenletét hozzávéve p kiküszöbölésével

$$x=\frac{a\sin\beta\sin\varphi}{\sin\alpha\sin(\varphi+\alpha+\beta)}.$$

Numerikusan $k=1{,}603$, $b=106{,}9^\circ$, $2\delta-\gamma=180{,}9^\circ$, $m=-0{,}7730$, $n=-1{,}658$, így $\operatorname{ctg}\varphi$ két értéke $-0{,}958$ és $1{,}731$. Ezekből $\varphi=133,77^\circ$, ill. $30{,}02^\circ$, az előbbivel azonban a PBC háromszög szögeinek összege nagyobb lenne 180°-nál, ez tehát nem megfelelő. φ utóbbi értékével pedig $x=BC=109{,}5$ m.

Székely Gábor (Budapest, Madách I. g. II. o. t.)

Megjegyzés: Kaphatunk (2)-ből 2φ szögfüggvényeire is egyenletet a törtek eltávolításával és a $2\sin u\sin v=\cos(u-v)-\cos(u+v)$ azonosság alkalmazásával:

$$a\sin\gamma\big[\cos\alpha-\cos(2\varphi+\alpha)\big]=c\sin\alpha\big[\cos\gamma-\cos(2\varphi+2\delta-\gamma)\big].$$

Innen az addíció–tétel alkalmazásával

$$J\cos 2\varphi + K\sin 2\varphi = L$$

alakú egyenletre jutunk. Láttuk az 1085. feladatban[1], hogy ennek megoldása:

$$\cos 2\varphi = \frac{JL \mp K\sqrt{J^2+K^2-L^2}}{J^2+K^2}, \qquad \sin 2\varphi = \frac{KL \pm J\sqrt{J^2+K^2-L^2}}{J^2+K^2}.$$

A számítás kissé nehézkesebb a fentinél.

II. megoldás. Fejezzük ki p-t a PAB és PBD háromszögekből, q-t a PCD és PAC háromszögekből. A kifejezések egyenlőségéből:

$$\begin{aligned} &(p=) \qquad \frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{(x+c)\sin(\varphi+\delta)}{\sin(\beta+\gamma)}, \\ &(q=) \qquad \frac{c\sin(\varphi+\delta)}{\sin\gamma} = \frac{(x+a)\sin\varphi}{\sin(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

A két egyenlőség bal, ill. jobb oldalait összeszorozva a φ-t tartalmazó tényezők kiesnek. A megmaradt adatok közül csak x ismeretlen, ez tehát az

$$(x+a)(x+c) = \frac{ac\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} = M \tag{3}$$

egyenletből kiszámítható:

$$x^2 + (a+c)x - (M-ac) = 0, \tag{4}$$

$$x = BC = \frac{1}{2}\big[-(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 + 4(M-ac)}\big].$$

Esetünkben $M > ac$, mert

$$\begin{aligned} 0^\circ < \alpha < \alpha+\beta < 90^\circ, \quad &\text{és így} \quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} > 1, \\ 0^\circ < \gamma < \gamma+\beta < 90^\circ, \quad &\text{és így} \quad \frac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin\gamma} > 1, \end{aligned}$$

és 1-nél nagyobb számok szorzata nagyobb 1-nél. Így (4) állandó tagja, vagyis a gyökök szorzata negatív, tehát a gyökök valósak, és egyikük negatív, másikuk pozitív. Csak az utóbbit használhatjuk, kiszámítva $x = 109{,}6$ m.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzések: 1. Hasonló egyenletre jutunk, ha kifejezzük a PAB, PBC, PCD és PAD háromszögek kétszeres területét egyrészt P-ből húzott közös PP' magasságukkal és az AD egyenesen levő alapjukkal, másrészt a P-ből kiinduló oldalaikkal és a közbezárt szögekkel, és a nyert egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozzuk. Így az

$$\frac{x(x+a+c)}{ac} = \frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} \tag{5}$$

egyenlet adódik.

Gálfi István (Budapest, Kandó K. hír. ip. t. III. o. t.)

2. (3) és (5) közvetlenül adódnak Papposz tételéből, amely szerint ha az egy S ponton átmenő t, u, v, w egyeneseket egy egyenes rendre a T, U, V, W pontokban metszi, akkor

$$\frac{TU}{UV} : \frac{TW}{WV} = \frac{\sin TSU\sphericalangle}{\sin USV\sphericalangle} : \frac{\sin TSW\sphericalangle}{\sin WSV\sphericalangle}.$$

Somogyi István (Ajka, Bródy I. g. II. o. t.)

[1] K.M.L. 23 (1961/11) 131. o.