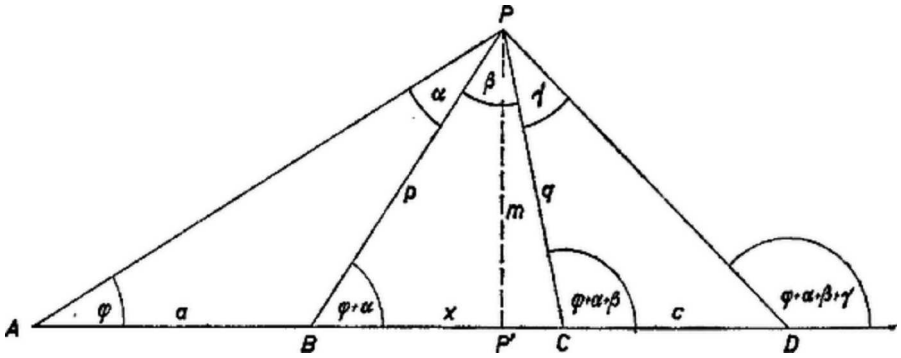
I. megoldás. Először a $PAD = \varphi$ szöget számítjuk ki. Vezessük be a következő jelöléseket: $AB = a$, $BC = x$, $CD = c$; P-ből mért látószögük rendre α, β, γ, $\alpha + \beta + \gamma = \delta$, továbbá $PB = p$ és $PC = q$. Ezekkel a PAB, PBC, PCD háromszögből a szinusz–tétel alapján

$$\frac{a}{p} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}, \quad \frac{p}{q} = \frac{\sin(\varphi+\alpha+\beta)}{\sin(\varphi+\alpha)}, \quad \frac{q}{c} = \frac{\sin(\varphi+\delta)}{\sin\gamma}. \tag{1}$$



A három egyenlőség bal, ill. jobb oldalainak összeszorzásával adódó egyenletből p és q kiesik, a fellépő adatok közül csak φ ismeretlen. Más szóval: egyismeretlenes egyenletet kapunk φ-re:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha\sin(\varphi+\alpha+\beta)\sin(\varphi+\delta)}{\sin\gamma\sin\varphi\sin(\varphi+\alpha)}, \tag{2}$$

amiből

$$\frac{\sin(\varphi+\alpha+\beta)\sin(\varphi+\delta)}{\sin\varphi\sin(\varphi+\alpha)} = \frac{a\sin\gamma}{c\sin\alpha} = k,$$

ismert szám. Szokásos rendezéssel és az addíció–tétel alkalmazásával minden tagban fellép $\sin^2\varphi$, $\sin\varphi\cos\varphi$ és $\cos^2\varphi$ egyike:

$$\sin^2\varphi\cos(\alpha+\beta)\cos\delta + \sin\varphi\cos\varphi\big[\cos(\alpha+\beta)\sin\delta + \sin(\alpha+\beta)\cos\delta\big] +$$
$$+\cos^2\varphi\sin(\alpha+\beta)\sin\delta = k\sin^2\varphi\cos\alpha + k\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha.$$

A szögletes zárójelben $\sin(\delta+\alpha+\beta) = \sin(2\delta-\gamma)$ áll, így

$$\sin(\alpha+\beta)\sin\delta\cos^2\varphi + \big[\sin(2\delta-\gamma) - k\sin\alpha\big]\cos\varphi\sin\varphi +$$
$$+\big[\cos(\alpha+\beta)\cos\delta - k\cos\alpha\big]\sin^2\varphi = 0.$$

Innen $\sin^2\varphi$-vel osztva ($\sin\varphi \neq 0$, mert P nincs az AD egyenesen) $\operatorname{ctg}\varphi$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\operatorname{ctg}^2\varphi + m\operatorname{ctg}^2\varphi + n = 0,$$

ahol

$$m = \frac{\sin(2\delta-\gamma) - k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\sin\delta}, \qquad n = \frac{\cos(\alpha+\beta)\cos\delta - k\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\sin\delta}.$$

Mármost a PBC háromszögből

$$\frac{x}{p} = \frac{\sin\beta}{\sin(\varphi+\alpha+\beta)}.$$

Ehhez (1) első egyenletét hozzávéve p kiküszöbölésével

$$x = \frac{a\sin\beta\sin\varphi}{\sin\alpha\sin(\varphi+\alpha+\beta)}.$$

Numerikusan $k = 1{,}603$, $b = 106{,}9°$, $2\delta - \gamma = 180{,}9°$, $m = -0{,}7730$, $n = -1{,}658$, így $\operatorname{ctg}\varphi$ két értéke $-0{,}958$ és $1{,}731$. Ezekből $\varphi = 133{,}77°$, ill. $30{,}02°$, az előbbivel azonban a PBC háromszög szögeinek összege nagyobb lenne $180°$-nál, ez tehát nem megfelelő. φ utóbbi értékével pedig $x = BC = 109{,}5$ m.

Székely Gábor (Budapest, Madách I. g. II. o. t.)

Megjegyzés: Kaphatunk (2)-ből 2φ szögfüggvényeire is egyenletet a törtek eltávolításával és a $2\sin u\sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$ azonosság alkalmazásával:

$$a\sin\gamma\big[\cos\alpha - \cos(2\varphi+\alpha)\big] = c\sin\alpha\big[\cos\gamma - \cos(2\varphi+2\delta-\gamma)\big].$$

Innen az addíció–tétel alkalmazásával

$$J\cos 2\varphi + K\sin 2\varphi = L$$

alakú egyenletre jutunk. Láttuk az 1085. feladatban[1], hogy ennek megoldása:

$$\cos 2\varphi = \frac{JL \mp K\sqrt{J^2+K^2-L^2}}{J^2+K^2}, \qquad \sin 2\varphi = \frac{KL \pm J\sqrt{J^2+K^2-L^2}}{J^2+K^2}.$$

A számítás kissé nehézkesebb a fentinél.

II. megoldás. Fejezzük ki p-t a PAB és PBD háromszögekből, q-t a PCD és PAC háromszögekből. A kifejezések egyenlőségéből:

$$(p=) \qquad \frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{(x+c)\sin(\varphi+\delta)}{\sin(\beta+\gamma)},$$

$$(q=) \qquad \frac{c\sin(\varphi+\delta)}{\sin\gamma} = \frac{(x+a)\sin\varphi}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

A két egyenlőség bal, ill. jobb oldalait összeszorozva a φ-t tartalmazó tényezők kiesnek. A megmaradt adatok közül csak x ismeretlen, ez tehát az

$$(x+a)(x+c) = \frac{ac\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} = M \tag{3}$$

egyenletből kiszámítható:

$$x^2 + (a+c)x - (M-ac) = 0, \tag{4}$$

$$x = BC = \frac{1}{2}\big[-(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 + 4(M-ac)}\big].$$

Esetünkben $M > ac$, mert

$$0^\circ < \alpha < \alpha+\beta < 90^\circ, \quad \text{és így} \quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} > 1,$$

$$0^\circ < \gamma < \gamma+\beta < 90^\circ, \quad \text{és így} \quad \frac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin\gamma} > 1,$$

és 1-nél nagyobb számok szorzata nagyobb 1-nél. Így (4) állandó tagja, vagyis a gyökök szorzata negatív, tehát a gyökök valósak, és egyikük negatív, másikuk pozitív. Csak az utóbbit használhatjuk, kiszámítva $x = 109{,}6$ m.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzések: 1. Hasonló egyenletre jutunk, ha kifejezzük a PAB, PBC, PCD és PAD háromszögek kétszeres területét egyrészt P-ből húzott közös PP' magasságukkal és az AD egyenesen levő alapjukkal, másrészt a P-ből kiinduló oldalaikkal és a közbezárt szögekkel, és a nyert egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozzuk. Így az

$$\frac{x(x+a+c)}{ac} = \frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} \tag{5}$$

egyenlet adódik.

Gálfi István (Budapest, Kandó K. hír. ip. t. III. o. t.)

2. (3) és (5) közvetlenül adódnak Papposz tételéből, amely szerint ha az egy S ponton átmenő t, u, v, w egyeneseket egy egyenes rendre a T, U, V, W pontokban metszi, akkor

$$\frac{TU}{UV} : \frac{TW}{WV} = \frac{\sin TSU\sphericalangle}{\sin USV\sphericalangle} : \frac{\sin TSW\sphericalangle}{\sin WSV\sphericalangle}.$$

Somogyi István (Ajka, Bródy I. g. II. o. t.)

[1] K.M.L. 23 (1961/11) 131. o.