

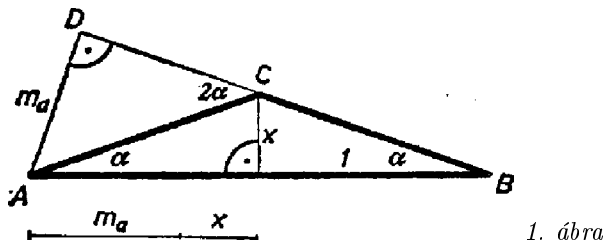
I. megoldás. Legyen az ABC háromszögben $CA = CB$, az A -ból húzott magasság talppontja a BC egyenesen D , a C -ből húzott magasság talppontja¹ E , legyen $AE = 1$ és $CE = x$. Ekkor a közös hegyes szöggel bíró ABD és CBE derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$AD = \frac{AB}{BC} \cdot CE = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}},$$

így a feltevés szerint

$$x + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 1,$$

amiből nyilvánvalóan $0 < x < 1$.



Rendezésekkel és közben négyzetre emeléssel

$$(1) \quad \begin{aligned} 2x &= (1-x)\sqrt{1+x^2}, \\ x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

A bal oldal első és utolsó tagját tekintve kézenfekvőnek látszik megpróbálni a kifejezés kiegészítését egy $x^2 + Ax \pm 1$ alakú polinom négyzetévé. Ez sikerül, mert az alap harmadik tagjának $+1$ -et véve, A értéke gyanánt a bal oldali kifejezés második és negyedik tagjából egyaránt -1 adódik. Így

$$(x^2 - x + 1)^2 = 5x^2,$$

és négyzetgyökvonással, majd újabb rendezéssel

$$(2) \quad x^2 - (1 \pm \sqrt{5})x + 1 = 0.$$

$\sqrt{5}$ előjelét negatívnak véve a diszkrimináns negatív: $(6 - 2\sqrt{5}) - 4 < 0$, így nincs valós gyök. $\sqrt{5}$ előjelét pozitívnak véve a $0 < x < 1$ követelménynek megfelelő gyök, négy tizedes jegyre pontosan

$$x = \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2} \approx 0,3460.$$

Most már a háromszögnek az alapon levő szögeire $\angle BAC = x$, így $\angle BAC = \angle ABC \approx 19^\circ 5'$, és $\angle ACB = 140^\circ 50'$.

Sövényházi Mária (Szeged, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Az (1) egy szimmetrikus egyenlet (szimmetrikusan elhelyezkedő együtthatói egyenlők), s így megoldható az azokra ismert általános eljárás szerint²: x^2 -tel való osztás (ugyanis $x = 0$ nem lehet gyök) és $x + 1/x = y$, $x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2$ helyettesítéssel $y^2 - 2y - 4 = 0$, ami szintén a (2) egyenletre vezet.

Kőszegi László (Baja, III. Béla g. IV. o. t.)

II. megoldás. $\angle CAB = \alpha$ jelöléssel $\angle ACD = 2\alpha$, így $AD = AC \sin 2\alpha$, $CE = AC \sin \alpha$, $AE = \cos \alpha$, és a feltétel szerint, AC -tel mindjárt osztva

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha = \cos \alpha.$$

Átrendezés után négyzetre emelve, majd ismert azonosságok alkalmazásával

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin 2\alpha &= \cos \alpha - \sin \alpha, \\ \sin^2 2\alpha &= 1 - \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

$$(4) \quad \sin 2\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,6180, \quad 2\alpha \approx 38^\circ 10'.$$

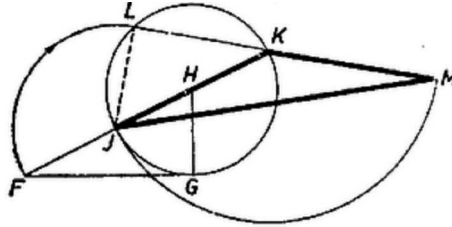
¹ Az ábrán E pótlendő.

² Pl. 1176. feladatban látott módon, K. M. L. 26 (1963/1) 56. o.

(A negatív gyököket figyelmen kívül hagytuk, mert α hegyes szög, $2\alpha < 180^\circ$, tehát $\sin 2\alpha > 0$.)

Karsai Kornélia (Szeged, Radnóti M. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (3) egyenletet $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + 1) = 1$, másképpen $\sin 2\alpha : : 1 = 1 : (\sin 2\alpha + 1)$ alakban írva látjuk, hogy $\sin 2\alpha$ a $\sin 2\alpha + 1$ szakasznak az aranymetszés (folytonos arányosság szerint való osztás) útján keletkezett kisebb része. Ennek alapján az ABC háromszög alakja megszerkeszthető: az FG szakasz G végpontjában emelt merőlegesre felmérjük a $GH = FG/2$ szakaszt, H körül GH sugárral kört írunk, ezt az FH egyenes J -ben és K -ban metszi, $FJ < FK$. Messe az előbbi kört az J körül JF sugárral írt kör L -ben és az LK egyenes a K körül KJ sugárral írt kört M -ben, akkor a JKM háromszög hasonló a szóban forgó háromszöghöz. Állításunk bizonyítását az olvasóra bízuk (2. ábra).



2. ábra

Simonovits András (Budapest, Radnóti M. gyak. g. II. o. t.)

2. Meghatározhatjuk α -t az

$$(5) \quad AD + CE = 2 \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 1$$

egyenletből is. Ebben közelítő módszereket is használhatunk, mert a szögfüggvénytáblázat a szögre a kerekítések miatt általában csak közelítő értéket ad. $\operatorname{tg} \alpha$ helyett a kisebb $\sin \alpha$ -t írva $1 = 2 \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha > 3 \sin \alpha$, tehát $\sin \alpha < 1/3 \approx 0,3333$, $\alpha < 19,47^\circ$. Ha viszont $\sin \alpha$ helyett a nagyobb $\operatorname{tg} \alpha$ -t írjuk: $1 < 3 \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha > 0,3333$, $\alpha > 18,43^\circ$. E két korlát még csak kb. foknyi pontossággal zárja körül α -t.

$\alpha = 19,47^\circ$ mellett $2 \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 0,6666 + 0,3535 = 1,0201$, így olyan kisebb szöggel kell próbálkoznunk, amely mellett a bal oldal 0,0201-del kisebbnek adódik. A tg -függvény gyorsabban változik, mint a $\sin$ -függvény, ezért a csökkenésből legalább $0,0201 : 3 = 0,0067$ -et $\operatorname{tg} \alpha$ csökkenése útján kell kapnunk:

$$\operatorname{tg} \alpha < 0,3535 - 0,0067 = 0,3468, \quad \alpha < 19,12^\circ,$$

$\sin \alpha$ csökkenéséből viszont legfeljebb 0,0067 adódhat: $\sin \alpha > 0,3333 - 0,0067 = 0,3266$, $\alpha > 19,06^\circ$.

Innen máris $0,1^\circ$ -nál kisebb hibával $\alpha = 19,1^\circ$.

Máté Zoltán (Bonyhád, Petőfi S. g. IV. o. t.)

3. Másképpen kapunk közelítő értéket a szögre abból az észrevételből, hogy az $y = 2 \sin x + \operatorname{tg} x$ függvény grafikonját a $0 \leq x \leq \pi/6$ intervallumban $1/2\%$ -nál kisebb hibával közelíti az $y = 3x$ függvény (x ívmértékben értendő). Ezért jó közelítő érték $3x = 1$ -ből $x = 1/3 = 0,3333$ radián $\approx 19,1^\circ$. Próbát téve (5)-ben az $\alpha = 19,0^\circ$, $19,1^\circ$ és $19,2^\circ$ értékekkel a bal oldal értéke rendre 0,9955, 1,0007, ill. 1,0060, a középső áll legközelebb az előírt 1 értékhez, ezért $0,1^\circ$ pontossággal $\alpha = 19,1^\circ$.

Dobozy Ottó (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. ált. isk. VII. o. t.)