

I. megoldás. Jelöljük az a_i, b_i, c_i, d_i számnégyest Q_i -vel, a benne előforduló legnagyobb értéket m_i -vel ($i = 0, 1, 2, \dots$). A képezési szabály szerint világos, hogy ha i legalább 1, akkor Q_i egyik száma sem negatív, és ennek folytán $m_{i+1} \leq m_i$, ugyanis Q_{i+1} számai két-két Q_i -beli, tehát nem negatív szám különbségének abszolút értékeként adódnak, tehát nem nagyobbak a két szám nagyobbikánál. Bebizonyítjuk, hogy ha a legnagyobb szám nem 0, akkor a negyedik lépésig legkésőbb határozottan csökken a négyes legnagyobb száma: ha $m_i > 0$, akkor $m_{i+4} < m_i$. Ebből nyilvánvaló, hogy a nem negatív egész számokból álló $m_1, m_2, \dots$ számsorozatban véges számú lépés után fellép egy 0 tag, ez pedig azt jelenti, hogy a megfelelő számnégyes minden tagja 0.

Bizonyításunk egyszerűbb lesz a következő két észrevétel felhasználásával. d_1 képezése mutatja, hogy d_0 -t és a_0 -t az eredeti számnégyesben ugyanúgy szomszédos tagoknak tekinthetjük, mint pl. a_0 -t és b_0 -t. Ezért a b_0, c_0, d_0, a_0 számnégyesből kiindulva a számnégyeseknek lényegében ugyanarra a sorozatra jutunk, mint az eredeti négyesből. Ugyanaz áll a d_0, c_0, b_0, a_0 négyesből képezett sorozatra. Ezek alapján bármely $i (\geq 0)$ index esetén Q_i tetszés szerinti tagját tekinthetjük a_i -nek, szomszédai egyikét b_i -nek, a szomszéd másik szomszédját c_i -nek, így a hátra levő tag d_i gyanánt szomszédja lesz az először kiválasztott tagnak, amint az eredeti elrendezésben is az volt.

Ha Q_i -ben nem szerepel m_i értékű elem szomszédjaként 0, akkor már $m_{i+1} < m_i$, s így biztosan $m_{i+4} < m_i$. Elég tehát azt az esetet vizsgálni, ha van Q_i -ben egy m_i értékű elem mellett 0. Az előrebozsátott megjegyzések szerint feltehetjük, hogy Q_i ilyen alakú:

$$v, \quad m_i, \quad 0, \quad w,$$

ahol v és w nem negatív egészek és nem nagyobbak m_i -nél. Ekkor Q_{i+1} az

$$m_i - v, \quad m_i, \quad w, \quad |v - w|$$

számnégyes lesz. Q_{i+2} -ben csak akkor nem lesz minden szám kisebb, mint m_i , ha Q_{i+1} -ben előfordul egymás mellett az m_i és 0 érték, tehát vagy $v = m_i$ vagy $w = 0$, vagy pedig $v - w = 0$ és e mellett w és $m_i - v$ egyike m_i -vel egyenlő, vagyis $v = w = m_i$ vagy $w = v = 0$. Ez azt jelenti, hogy a harmadik lehetőség mindkét változata az első két lehetőség valamelyikének speciális esete, így elég azokkal foglalkozni.

Ezekben az esetekben Q_{i+1} a 0, $m_i, w, m_i - w$, vagy az $m_i - v, m_i, 0, v$ négyes, és a kettő nem különbözik lényegesen (w és $m_i - v$ játszik azonos szerepet a két négyesben). Elég tehát az első négyessel foglalkozni. Ekkor Q_{i+2} az

$$m_i, \quad m_i - w, \quad |m_i - 2w|, \quad m_i - w$$

négyes. Itt m_i és 0 érték egymás mellett csak úgy szerepelhet, ha $w = m_i$, minden más esetben Q_{i+3} számai kisebbek m_i -nél. Ha pedig $w = m_i$ akkor Q_{i+2} az

$$m_i, \quad 0, \quad m_i, \quad 0$$

négyes, így Q_{i+3} és Q_{i+4} az

$$m_i, \quad m_i \quad m_i, \quad m_i \quad \text{ill. a} \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

négyes. Az állításnál valamivel élesebben azt kaptuk tehát, hogy vagy Q_{i+4} már csupa 0-ból áll, vagy már $m_{i+3} < m_i$.

Mint láttuk, ebből a feladat állítása következik.

Szilágyi Tivadar (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

II. megoldás. Ha egy Q számnégyes mindegyik száma osztható egy D számmal, akkor a számok különbségei is oszthatók D -vel: a megfelelő két szám D -ed része különbségének a D -szeresei. Így, ha a Q négyes számainak a D -ed részéből alkotott négyes Q' , akkor Q -ból és Q' -ből képezve a feladat előírása szerint újabb négyeseket, ezekben két egymásnak megfelelő szám közül vagy mindkettő 0, vagy egyik sem. Így egy négyest úgy is helyettesíthetünk kisebb számokból állóval, ha a négy szám nem relatív prím, hogy mindegyiket osztjuk ugyanazzal a közös osztóval.

Megmutatjuk, hogy bármely számnégyesből kiindulva legkésőbb a negyedik lépésben minden elem páros szám, tehát $D = 2$ -vel egyszerűsíthetünk. Elég lesz evégett a páros számok helyére P -t, a páratlanok helyére U -t írni. Ebből megállapíthatjuk a továbbképezéssel adódó számok párosságát is, figyelembe véve, hogy két megegyező párosságú szám különbsége páros, két ellentétes párosságúé pedig páratlan.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a négyes három eleme páratlan, egy páros; feltehetjük ekkor az I. megoldásban tett megállapítások szerint, hogy az utolsó elem páros. Ekkor a további négyesek így alakulnak:

$$\begin{array}{llll} Q_0 & U, & U, & U, & P, \\ Q_1 & P, & P, & U, & U, \\ Q_2 & P, & U, & P, & U, \\ Q_3 & U, & U, & U, & U, \\ Q_4 & P, & P, & P, & P, \end{array}$$

állításunknak megfelelően.

Már csak a P, P, P, U esetet kell megvizsgálunk, mert a fenti sorozatban előfordul négy páratlan számból álló négyes is (Q_3) és két-két páros és páratlan számból állónak a két lényegesen különböző típusa is (Q_1 , ill. Q_2). Ezekből 4-nél kevesebb lépésben jutunk Q_4 -höz. A hátra lévő P, P, P, U típus 1 lépésben a fenti Q_1 -re vezet, tehát 4 lépésben Q_4 -re.

Ezek szerint valóban legkésőbbben minden 4. lépésben egyszerűsíthetünk $D = 2$ -vel, és így m is felére csökken. Ha előbb nem érjük el a 0, 0, 0, 0 számnégyest, akkor eljutunk egy olyan négyesre, mely már csak a 0 és 1 elemekből áll. Minden ilyen számnégyes megkapható a fent vizsgált típusokból, ha P helyére 0-t, U helyére 1-et írunk, és ekkor legkésőbbben a 4. lépésben 0, 0, 0, 0-ra jutunk.

Bóta Károly (Budapest, Steinmetz M. g. I. o. t.)