

I. megoldás. I. A szám jegyeit rendre A , B , C -vel jelölve a feltételek szerint

$$(1) \quad 2B = A + C,$$

$$(2) \quad (10^2 A + 10B + C)(10^2 C + 10A + B) = (10^2 B + 10C + A)^2.$$

(2)-ben beszorzás és rendezés után egyszerűsíthetünk $10^3 - 1$ -gyel:

$$(3) \quad A^2 - 10B^2 + 10AC - BC = 0,$$

és innen B -t (1) alapján kiküszöbölve

$$(4) \quad A^2 - 3AC + 2C^2 = 0.$$

Nyilván $C \neq 0$, mert különben $A = 0$, majd $B = 0$ következne. Másrészt az együtthatók összege $1 - 3 + 2 = 0$, tehát $A = C$ -vel az egyenlet teljesül, vagyis a bal oldal osztható az $A - C$ különbséggel. Szorzattá alakítás után

$$(A - C)(A - 2C) = 0,$$

ez pedig csak $A - 2C = 0$, $A = 2C$ mellett teljesülhet, mert A és C feltevés szerint különbözők, $A - C \neq 0$. Így (1)-ből $B = 3C/2$.

Ezek szerint C páros számjegy, másrészt $A = 2C \leq 9$, mert A szintén számjegy, ezért $C < 5$; így csak a következő két számjegyhármas felelhet meg:

$$C = 2, \quad A = 4, \quad B = 3; \quad C = 4, \quad A = 8, \quad B = 6,$$

tehát a szóban forgó szám 432 vagy 864. Valóban $432 = 16 \cdot 27 = 2^4 \cdot 3^3$ és $243 = 3^5$ mértani középárányosa $2^2 \cdot 3^4 = 324$, a feladat állításainak megfelelően. Ugyanez áll a 864 számra is, melynek jegyei rendre 2-szer nagyobbak.

II. Tegyük fel, hogy az $\overline{ABC}$ számnak akkor is megvannak a feltételekben kimondott tulajdonságai, ha a számot a b -alapú (bázisú) számrendszerben felírva gondoljuk, vagyis (2)-ben 10 helyett b -t írunk ($b \geq 2$, egész szám). A fentiek mintájára, közben $b^3 - 1$ -gyel egyszerűsítve – ami $\neq 0$ – a (3) és (4) egyenletek helyére a következők lépnek:

$$(3') \quad A^2 - bB^2 + bAC - BC = 0,$$

$$(4') \quad (b - 4)A^2 - 2(b - 1)AC + (b + 2)C^2 = 0.$$

A bal oldalt A és C polinomjának tekintve itt is 0 az együtthatók összege, tehát $A - C$ a bal oldalból kiemelhető:

$$\begin{aligned} [(b - 4)A^2 - (b - 4)AC] - [(b + 2)AC + (b + 2)C^2] &= \\ &= (A - C)[(b - 4)A - (b + 2)C] = 0. \end{aligned}$$

Továbbra is kizárjuk azt az érdektelen esetet, amelyben $A = C = B$, így a második tényező 0, amiből, mindjárt (1)-re tekintettel

$$(5) \quad (b - 4)A = (b + 2)C,$$

$$(6) \quad A = \frac{(b + 2)C}{b - 4} > C, \quad B = \frac{(b - 1)C}{b - 4} > C.$$

(A $b - 4 = 0$, $b = 4$ esetet később vizsgáljuk.) Nem lehet, hogy C osztható legyen $b - 4$ -gyel, különben

$$A = (b + 2) \frac{C}{b - 4} \geq b + 2,$$

holott a b alapú számrendszerben a legnagyobb számjegy $b - 1$. Ezért B csak úgy egész, ha $b - 1$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója $b - 4$ -gyel. Ez a közös osztó csak 3 lehet, mert ennyi a két szám különbsége, viszont két szám közös osztója a különbségüknek is osztója, és 3-nak 1-nél nagyobb osztója csak önmaga. Legyen $b - 1 = 3k$, ahol k egész szám, és $b > 4$ miatt $k > 1$, vagyis a számrendszer alapszáma $b = 3k + 1$ alakú. Így (6)-ból

$$B = \frac{kC}{k - 1}, \quad A = \frac{(k + 1)C}{k - 1} = B + \frac{C}{k - 1},$$

kell tehát, hogy C többszöröse legyen $k - 1$ -nek: $C = m(k - 1)$, ahol m természetes szám. Ekkor

$$B = km, \quad A = km + m = (k + 1)m.$$

Itt $m < 3$, különben ugyanis $A \geq 3k+3 = b+2$. $m = 2$ -vel viszont $k > 1$ miatt mindig teljesül $A = 2k+2 \leq 3k = b-1$, vagyis $A = 2k+2$ a b alapú számrendszerben számjegy. Így m lehetséges értékei 1 és 2.

Ezek szerint minden $k \geq 2$ egész szám mellett a $3k+1$ alapú számrendszerben az

$$A = k+1, \quad B = k, \quad C = k-1$$

és

$$A = 2(k+1), \quad B = 2k, \quad C = 2(k-1)$$

számjegyekkel felírt $\overline{ABC}$ számoknak megvan a vizsgált tulajdonsága, vagyis mindig áll

$$\overline{CAB} \cdot \overline{ABC} = \overline{BCA}^2.$$

Pl. a $b = 7$ -es számrendszerben $k = 2$, ezért $A, B, C = 3, 2, 1$, ill. $6, 4, 2$; az elsővel $321_7 = 162 = 2 \cdot 3^4$, $132_7 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$, $213_7 = 108 = 2^2 \cdot 3^3$, az utóbbi szám valóban mértani közepe az előbbi kettőnek.

$b = 4$ esetén (5)-ből, majd (1)-ből $C = 0$, $A = 2B$, másrészt $A \leq 3$, így A egyetlen lehetséges értéke $A = 2$, ennél fogva $B = 1$. A tízes rendszerre átírva $\overline{ABC} = 210_4 = 36$, $\overline{CAB} = 021_4 = 9$, $\overline{BCA} = 102_4 = 18$, és valóban $36 \cdot 9 = 18^2$. Ebben a számrendszerben csak egy számnak van meg a vizsgált tulajdonsága.

Lénárt Zoltán (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

II. megoldás. (mindjárt tetszőleges alapú számrendszerre). Gyorsabban jutunk eredményre, ha az (1) feltevést

$$A - B = B - C = d, \quad \text{azaz} \quad A = B + d, \quad C = B - d$$

alakban írjuk, ahol d egész szám. Ekkor a b alapú számrendszerben ($b \geq 3$) a (2) egyenlet így alakul:

$$\begin{aligned} & [(B+d)b^2 + Bb + B-d][(B-d)b^2 + (B+d)b + B] \\ &= [Bb^2 + (B-d)b + (B+d)]^2, \\ & d(b^3 - 1)[-db + 3B + d] = 0. \end{aligned}$$

Innen $d \neq 0$ és $b \neq 1$ miatt

$$B = \frac{(b-1)d}{3}, \quad A = \frac{(b+2)d}{3}, \quad C = \frac{(b-4)d}{3}.$$

$B \geq 0$ miatt $d > 0$, $A > B > C$, másrészt $A \leq b-1$ miatt $d \leq 2$, d nem egyszerűsíthető 3-mal, ezért A, B, C -re egész megoldást csak akkor kapunk, ha $b-1 = 3k$. $b = 4$ és $d = 2$ esetén $A > b-1$ nem megoldás, minden más megfelelő b esetén két megoldás van.

Szalkai István (Budapest, Széchenyi I. g. III. o. t.)