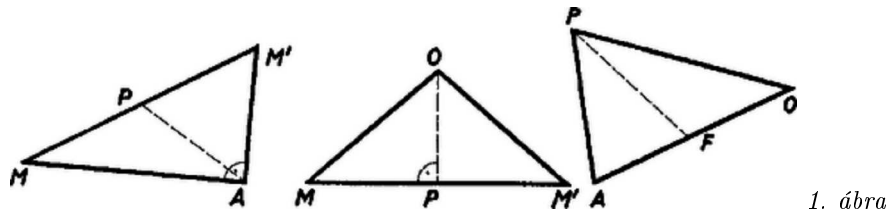


Legyen az adott G gömb középpontja O , sugara R , az adott pont A , továbbá G -nek egy az A -ból derékszögben látható húrja (ha van ilyen) MM' , és ennek felezőpontja P .



1. ábra

P egyszersmind az $MM'A$ derékszögű háromszög körülírt körének középpontja, ezért $PA = PM$. Másrészt P – ha különbözik O -tól – az OMM' egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja, ezért $PO^2 + PM^2 = OM^2$, és az előbbi egyenlőség figyelembevételével

$$(1) \quad PO^2 + PA^2 = R^2$$

(Ez akkor is érvényes, ha P és O egybeesnek, mert ekkor $PA = OA = OM = R$, A a G gömbön van. Fordítva, ha A a G felületén van, akkor nyilvánvaló, hogy G -nek csak az átmérői láthatók A -ból derékszögben, ezért a keresett mértani hely egyetlen pontból áll: O -ból. Ezt a helyzetet tovább figyelmen kívül hagyjuk.)

(1)-ből következik, hogy P -nek az AO szakasz F felezőpontjától mért távolsága állandó, ugyanis PF az OAP háromszögben az OA oldalhoz tartozó súlyvonal, ezért ismert összefüggés szerint

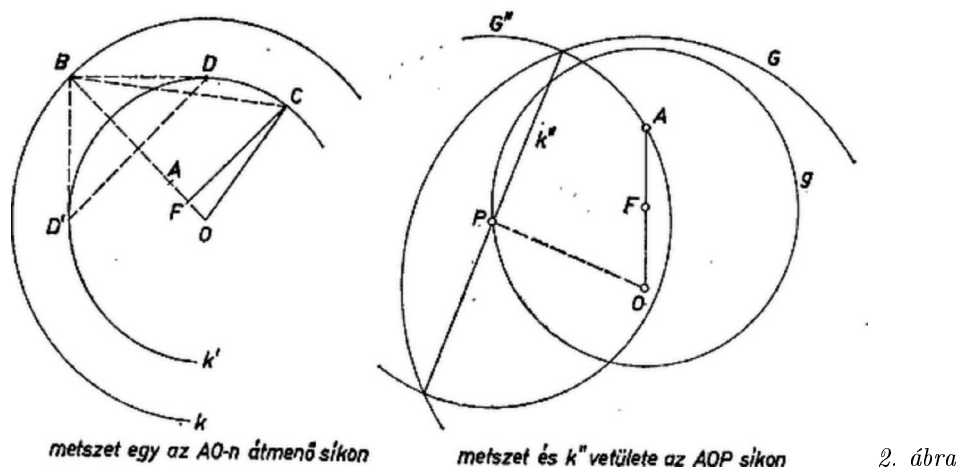
$$(2) \quad PF^2 = \frac{1}{4}[2(PO^2 + PA^2) - OA^2] = \frac{1}{4}(2R^2 - OA^2),$$

ami állításunkat igazolja. Egyszersmind azt is látjuk, hogy a feltételnek megfelelő P pont (s így egyben A -ból derékszögben látszó húr is) csak akkor van, ha ez a kifejezés nem negatív, tehát ha $OA^2 \leq 2R^2$. Ezt a továbbiakban feltesszük. Ha itt a „ $\leq$ ” jel érvényes, akkor P rajta van egy az F pont körül írt gömb felületén, amelynek sugara

$$(3) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{R^2}{2} - OF^2},$$

tehát a keresett mértani hely része ennek a gömbfelületnek. Az $OA^2 = 2R^2$ esetre később visszatérünk.

Bebizonyítjuk, hogy g felületének minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. A mértani hely pontjai nyilván csak G belső pontjai lehetnek, ezért először azt látjuk be, hogy g minden pontja G belsejében van. (3) szerint $OF < R/\sqrt{2}$, tehát F benne van az O körül $R/\sqrt{2}$ -sugárral írt G' gömb belsejében, így G -ben is. G -nek F -hez legközelebbi pontja az OF félegyenesen levő gömbsugar B végpontja. Így azt kell megmutatnunk, hogy $r \leq BF$.



2. ábra

Messe egy az OA egyenesen átmenő sík G -t és G' -t a k , ill. k' körben. Húzzuk meg k' -nek az F -en átmenő, OF -re merőleges húrját, legyen ennek egyik végpontja C . Így r -et megadja CF ; az $r = CF \leq BF$ állítás pedig egyértelmű azzal, hogy a BCF derékszögű háromszög C -nél levő hegyesszöge nagyobb, vagy ugyanakkora, mint a B -nél levő hegyesszöge, más szóval, hogy a B -nél levő szög kisebb, mint 45° , vagy egyenlő vele.

A k' -höz B -ből húzott érintők érintési pontját D -vel és D' -vel jelölve a k' bármely pontjához B -ből húzott félegyenes a DBD' szögtartomány belsejében halad vagy annak határán, tehát $CBF \angle \leq DBF \angle$. A BOD derékszögű háromszögből viszont $BD^2 = BO^2 - DO^2 = R^2/2 = DO^2$, ez a háromszög egyenlő szárú, és így $DBO \angle = DBF \angle = 45^\circ$.

Eszerint állításunk helyes, g -nek nincs pontja G -n kívül. Maga B sem lehet rajta g felületén, mert $BF = r = CF$ csak akkor teljesül, ha C azonos D -vel vagy D' -vel, ekkor azonban F felezi OB -t, tehát A azonos B -vel, ezt az esetet viszont kizártuk.

Megmutatjuk most már, hogy g -nek tetszés szerinti P pontjához megadható G -nek olyan MM' húrja, amely A -ból derékszögben látszik, és amelynek felezőpontja P . Írjunk P körül PA sugárral G'' gömböt. G és G'' egy k'' körben metszik egymást, amely nem fajul ponttá, ugyanis a két gömbsugár különbsége kisebb középpontjaik távolságánál:

$$R - PA < PO, \quad \text{azaz} \quad PO + PA > R,$$

mert az utóbbi egyenlőtlenségben mindkét oldal pozitív, tehát az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, amikor $(PO + PA)^2 > R^2$, ez pedig (1) miatt teljesül. (Ugyanis P különbözik O -tól is, A -tól is, mert az $r = OF = AF$ feltevés a kizárt $OA = R$ -re vezet.)

k'' -nek bármely MM' átmérője megfelel állításunknak: A -ból derékszögben látszik, és felezőpontja P . Az utóbbi feltétel teljesül, mert k'' középpontja P , vagyis k'' a G'' -nek főköre. Valóban, k'' minden M pontjára $MP = PA$ és $MO = R$, ezért (2) és (3) alapján

$$MP^2 = PA^2 = 2FP^2 - OP^2 + \frac{OA^2}{2} = R^2 - OP^2 = MO^2 - OP^2,$$

tehát az MPO szög derékszög, k'' a P -n átmenő és OP -re merőlegesen álló síkban van. Így viszont az első feltétel is teljesül, mert k'' átmérői egyben G'' -nek is átmérői, és így a G'' felületén levő A -ból Thalész tétele szerint derékszögben láthatók. (Maga A nincs rajta k'' -n, mert k'' a G -n van, A pedig nincs rajta.) Ezek szerint a keresett mértani helyet $OA^2 < 2R^2$ esetén a g felületén levő pontok alkotják.

Az $OA^2 = 2R^2$ esetre nyilvánvaló, hogy annak a kúpnak, melynek alkotói az A -ból G -hez húzható összes érintők, a félnyílásszöge 45° , és így A -ból csak olyan húrok láthatók derékszögben, melyek mindkét végpontja a kúp és G érintkezési körén van, és az ilyenek is csak akkor, ha a mondott körnek átmérői. Ekkor viszont P a mondott kör középpontja. Könnyű belátni, hogy e középpont egyben az OA szakasz felezőpontja.

Lukonics Gábor (Aszód, Petőfi S. Gimn., IV. o. t.)