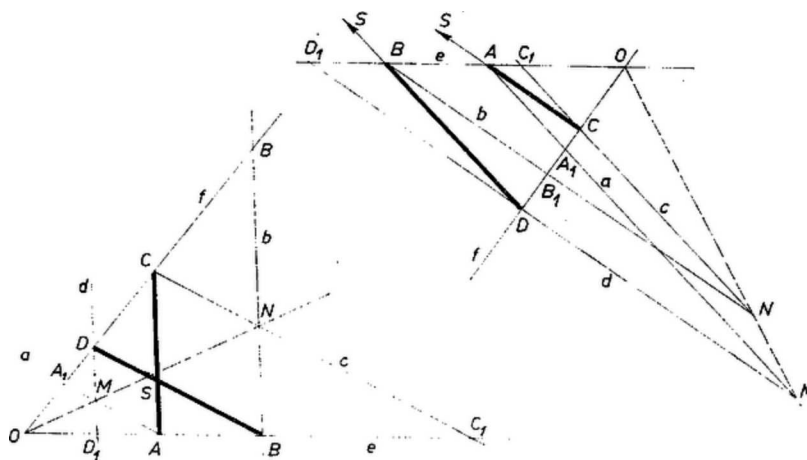


I. megoldás. α) Jelöljük az A, B, C, D ponton át az előírás szerint meghúzott egyenest rendre a, b, c, d -vel, az a, d egyenespár metszéspontját M -mel, a b, c egyenespárét N -nel. Ekkor az MN álló megy át e -nek és f -nek O metszéspontján és felezi a köztük levő 2 pár csúcsszög egyikét.

Állítjuk, hogy M is, N is egyenlő távolságra van e, f mindegyikétől. Ehhez megmutatjuk, hogy a MAB és MCD háromszögek területe egyenlő, és ugyanígy az NAB, NCD háromszögpáré is. Ebből következik, hogy az M -ből, ill. N -ből húzott magasságaik egyenlők, mert az e -n fekvő AB és az f -en fekvő CD alapjaik egyenlők.



1. ábra és 2. ábra

Az AC és BD egyenesek metszéspontját S -sel jelölve a szerkesztés folytán az $AMDS$ és a $CNBS$ négyszög paralelogramma. Ekkor, az idomok területét ugyanígy jelölve, mint magukat az idomokat, a szerkesztés folytán valóban

- (1) $MAB = MAS = MSD = MCD$ és
 (2) $NAB = NSB = NCS = NCD$.

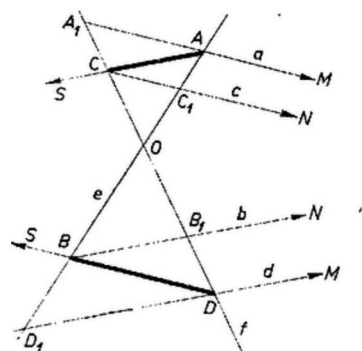
Így M is, N is az e, f egyenespár valamelyik szögfelezőjén van.

β) Azt kell még belátnunk, hogy M és N az egyenespár ugyanazon szögfelezőjének pontja, vagyis az egyenespárral meghatározott 4 szögtartomány közül vagy ugyanabban vannak, vagy pedig két csúcsszögtartományban. Ha az adott pontok O -nak ugyanazon oldalán vannak és a sorrend e -n: O, A, B , f -en pedig O, D, C (1. ábra), akkor a és b -nek f -fel való metszéspontját A_1 -gyel, ill. B_1 -gyel,¹ c és d -nek e -vel való metszéspontját C_1 -gyel, ill. D_1 -gyel jelölve a pontok sorrendje e -n D_1, A, B, C_1 , f -en pedig A_1, D, C, B_1 . Nyilvánvaló ugyanis, hogy a metszéspontok O -nak ugyanazon oldalán vannak, mint az adott pontok, továbbá hasonló háromszögekből $OD_1 = OA \cdot OD / OC < OA$, $OC_1 = OB \cdot OC / OD > OB$, és ugyanígy $OA_1 < OD$, és $OB_1 > OC$. Ennélfogva ADA_1D_1 és BCB_1C_1 konvex négyszögek, és benne vannak a 180° -nál kisebb AOC szögtartományban, tehát ez áll átlóiknak M , ill. N metszéspontjára is.

C és D sorrendjét az előbbihez képest megfordítva feltehetjük, hogy $OA > OC$ (ugyanis $OA = OC$ esetén $BD \parallel AC$, a paralelogramma elfajul, az átló határozatlan). Ekkor A_1 és B_1 a CD szakaszon vannak (2. ábra), mert

$$CB_1 = \frac{OC}{OA} \cdot AB < AB = CD \quad \text{és} \quad DA_1 = \frac{OD}{OB} \cdot BA < BA = DC,$$

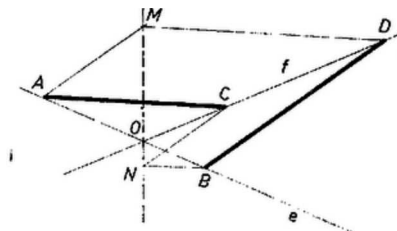
ugyanis $OD = OC + CD < OA + AB = OB$. Ezért A_1 közelebb van d -hez, mint C (azaz mint A), tehát A -ból A_1 felé haladva közeledünk d -hez, ezért a és d -nek M metszéspontja A_1 -en túl adódik, abban a szögtartományban, amely az AOC szögtartományval az OC félegyenes mentén határos. Ugyanez áll N -re is, mert B_1 közelebb van c -hez, mint D és B .



3. ábra

¹Az ábrán B_1 indexe pótlendő.

Hasonló maggondolás mutatja, hogy M és N akkor is az e és f közti 4 szögtartomány közül ugyanabban vannak, ha O az AB és CD szakaszok mindegyikének pontja (3. ábra). Ha viszont O az AB és CD szakaszok egyikén rajta van, másikán nem, akkor M és N két csúcsszögtartományban van (4. ábra), tehát ekkor is ugyanazon szögfelező egyenes pontjai.



4. ábra

Ha A, B, C és D közül egy vagy kettő az O -ban van, akkor M és N egyike azonos O -val, ezért az utóbbi vizsgálat felesleges, vagy a paralelogramma határozatlan, az állításnak nincs értelme.

Kuzmann Ernő (Budapest, I. István g. IV. o. t.)
dolgozatából, kiegészítve a β) résszel.

Megjegyzés. A β) rész 4 esetét egyszerre intézhetjük el, ha (1)-ben és (2)-ben a háromszögek körüljárási irányát is tekintetbe vesszük. A felhasznált háromszögek felírt körüljárása (1)-ben is, (2)-ben is egyező, mert az első és a harmadik lépésben az elhagyott és az új csúcs összekötő egyenese párhuzamos a megmaradó oldallal – pl. $BS \parallel MA$ –, a második lépésekben pedig az $AMDS$, ill. $CNBS$ paralelogramma MS , ill. NS átlóján másodszer az elsővel ellentétes irányban haladtunk végig.

Ha mármost M és N az e egyenes ugyanazon oldalán vannak, akkor az MAB és NAB háromszögek körüljárása megegyező. Ezért egyezik egymással MCD és NCD körüljárása is, tehát M és N az f -nek is ugyanazon oldalán vannak, vagyis az e és f közti 4 szögtartomány közül ugyanabban. Ha pedig e szétválasztja az M, N pontpárt, akkor az MAB és NAB körüljárások iránya ellentétes, ugyanez áll az MCD és NCD körüljárásra is, tehát M -ből N -be haladva e és f mindegyikét átlépjük, M és N két csúcsszögtartományban van.

II. megoldás. Az 1. ábrán az OC_1C szög szárait átmetszik a $BN = b$ és AC párhuzamos egyenesek, ezért $C_1N : NC = C_1B : BA$; másrészt a C_1OC szög szárait a C_1C, BD és AA_1 párhuzamosok, ezért $C_1B : BA = CD : DA_1 = BA : DA_1 = AO : A_1O = C_1O : CO$, tehát $C_1N : NC = C_1O : CO$. Eszerint a C_1OC háromszögben a C_1OC szög felezője a C_1C oldalt N -ben metszi. Hasonlóan adódik, hogy OM is felezi az e és f közti szöget.

Mint hogy azonban a háromszög szögfelezőjének osztásarányára vonatkozó, itt felhasznált tétel a külső szög felezőjére is érvényes – hacsak a háromszög nem egyenlő szárú –, azért itt is bizonyítani kell, hogy M és N ugyanazon szögfelező pontjai.

Földes Antónia (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)
dolgozata, kiegészítéssel.

Nincs szükség annak külön bizonyítására, hogy az MN átló átmegy O -n, ha a koordináta geometria módszereivel bizonyítjuk az állítást:

III. megoldás. Válasszuk az e és f egyenesek O metszéspontját a derékszögű koordináta rendszer origójának, és legyenek a rendszer tengelyei e és f szögfelezői. Így az AB és CD szakaszoknak a tengelyeken levő vetületei egyenlő hosszúak. Az abszcissa tengelyen való vetületüket p -vel és e iránytényezőjét m -mel jelölve az ordinátatengelyen levő vetületük mp , az X tengelyt úgy választva ki és úgy irányítva, hogy p, m pozitívak legyenek ($m = 0$ mellett f egybeesnék e -vel, $p = 0$ mellett szintén). Legyen A és C abszcisszája x_1 , ill. x_2 , így B abszcisszája $x_1 + p$, D -é pedig $x_2 + p$, vagy $x_2 - p$ aszerint, hogy D abszcisszája nagyobb mint C -é, vagy kisebb. Így az összes koordináták:

$$A(x_1, mx_1), \quad B[x_1 + p, m(x_1 + p)], \quad C(x_2, -mx_2), \\ D[x_2 \pm p, -m(x_2 \pm p)].$$

(p kétféle előjeli lehetőségét később fogjuk szétválasztani.) Ezekből a szükséges irányok iránytényezői:

$$AC : \frac{m(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = m', \quad BD : \frac{m(x_1 + x_2 + p \pm p)}{x_1 - x_2 + p \pm p} = m''.$$

Felírjuk az ezekkel B -n és D -n át, ill. A -n és C -n át húzott b, d, a , ill. c párhuzamos egyenes egyenletét, majd abból a két tengellyel való metszéspontjuk abszcisszáját, ill. ordinátáját:

$$\begin{aligned}
b: & \quad y - m(x_1 + p) = m'(x - x_1 - p), \\
d: & \quad y + m(x_2 \pm p) = m'(x - x_2 \mp p), \\
a: & \quad y - mx_1 = m''(x - x_1), \\
c: & \quad y + mx_2 = m''(x - x_2)
\end{aligned}$$

X -et metszik rendre az alábbi abszcisszán:

$$b_1 = \frac{2x_2(x_1 + p)}{x_1 + x_2},$$

c

$$d_1 = \frac{2x_1(x_2 \pm p)}{x_1 + x_2},$$

$$a_1 = \frac{2x_1(x_2 \pm p)}{x_1 + x_2 + p \pm p},$$

c

$$c_1 = \frac{2x_2(x_1 + p)}{x_1 + x_2 + p \pm p},$$

Y -t metszik rendre az alábbi ordinátán:

$$b_2 = -m'b_1 = -\frac{2mx_2(x_1 + p)}{x_1 - x_2};$$

$$d_2 = -m'd_1 = -\frac{2mx_1(x_2 \pm p)}{x_1 - x_2};$$

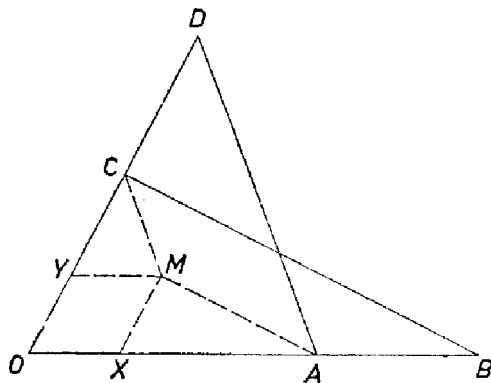
$$a_2 = -m''a_1 = -\frac{2mx_1(x_2 \pm p)}{x_1 - x_2 + p \mp p};$$

$$c_2 = -m''c_1 = -\frac{2mx_2(x_1 + p)}{x_1 - x_2 + p \mp p};$$

Ezek szerint, ha p előtt a felső előjel érvényes, akkor $b_2 = c_2$, és $d_2 = a_2$, vagyis mind a b , c , mind a d , a egyenespár az Y -tengelyen metszi egymást, ha pedig az alsó előjel érvényes, akkor $b_1 = c_1$ és $d_1 = a_1$, vagyis egyenespárjaink metszéspontjai az X -tengelyen vannak.

A $+p$ esetre vonatkozó állításunk nem érvényes, ha x_1, x_2 , mert így b_2, d_2, a_2 és c_2 , nevezője 0. Ez esetben az állításnak sincs értelme, mert $AC \parallel BD \parallel Y$, a kérdéses paralelogramma nem jön létre. Hasonló elfajulás adódik, ha $-p$ esetében $x_1 = -x_2$, ekkor $AC \parallel BD \parallel X$.

Makai Endre (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)



5. ábra

IV. megoldás. Megmutatjuk, hogy az A -n át BC -vel és C -n át AD -vel húzott párhuzamosok M metszéspontja az egyik szögfelezőn van. Az OA és OC szögszárakkal párhuzamos szakaszoknak tulajdonítsunk pozitív vagy negatív előjelet, amint a szakasz OA -val, ill. OC -vel egyirányú vagy ellentétes irányú. Az M ponton át OC -vel párhuzamos egyenes messe az OA egyenest az X pontban, az OA -val párhuzamosan húzott egyenes OC -t Y -ban. Ekkor az OBC és XAM , továbbá az ODA és YCM háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, így a háromszögek hasonlóak és körüljárásuk is megegyező, tehát a betűzés sorrendjében a megfelelő oldalpárok vagy mind egyező, vagy mind ellentétes irányúak. Ezért a szögszárakkal párhuzamos oldalak arányát felírva, az előjeles távolságokra fennáll

$$\frac{OB}{XA} = \frac{OC}{XM} = \frac{OC}{OY} \quad \text{és} \quad \frac{OD}{YC} = \frac{OA}{YM} = \frac{OA}{OX};$$

felhasználtuk, hogy az $OXMY$ paralelogrammában XM és OY , továbbá YM és OX egy irányban párhuzamosak. A törteket eltávolítjuk, az XA és YC távolságokat $OA - OX$, ill. $OC - OY$ alakba írjuk:

$$OB \cdot OY = (OA - OX) \cdot OC, \quad OD \cdot OX = (OC - OY) \cdot OA,$$

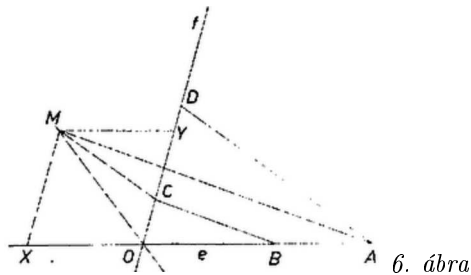
vagy átrendezve

$$OC \cdot OX + OB \cdot OY = OA \cdot OC, \quad OD \cdot OX + OA \cdot OY = OA \cdot OC.$$

Vonjuk le a második egyenlőséget az elsőből:

$$(OC - OD) \cdot OX + (OB - OA) \cdot OY = 0, \quad \text{vagy} \quad DC \cdot OX + AB \cdot OY = 0.$$

Itt CD és AB egyenlő hosszúak. Ha az előbbi OC -vel, az utóbbi OA -val egyirányú, vagy mindkettő ellentétes irányú, akkor a nyert egyenletből $OX = OY$ következik, ha pedig az egyik szakaszpár egyirányú, a másik ellentétes irányú, akkor $OX = -OY$.



6. ábra

Azt nyertük tehát, hogy az $OXMY$ paralelogramma rombusz, s így OM az XOY szög szögfelezője. Ez a szög az AOC szög, vagy a csúcssöge, ha az OA és AB , valamint OC és CD egyirányúak, vagy mindkét pár ellentétes irányú. Ha viszont a két pár egyike egyirányú, a másik ellentétes irányú, akkor az M pont az AOC szöget 180° -ra kiegészítő csúcsszögpár szögfelezőjén van. Ebből az is következik, hogy ha A és B , továbbá C és D szerepét egyidejűleg felcseréljük, akkor ismét ugyanazon a szögfelezőn levő pontot kapunk; másrészt az így nyert N pont a feladatban leírt paralelogramma M -mel átellenes csúcsa. Az MN átló tehát valóban az e, f egyenesek egyik szögfelezőjén van.

Megjegyzés: A fenti megoldás azt is adja, hogy ha AB és CD nem egyenlők, az MN egyenes akkor is átmegy O -n. Valóban, akkor is fennáll $OX/OY = AB/CD$, tehát az $OXMY$ paralelogramma alakja csak az AB, CD (irányított) szakaszok arányától függ. A és B , továbbá C és D egyidejű felcserélésével tehát egy az előbbihez hasonló $OX'NY'$ paralelogrammához jutunk, amiből következik az állítás, ami egyébként az I. megoldásból is könnyen kiolvasható.