

A 762. gyakorlatban)¹ talált feltétel

$$c^2 + cf + f^2 + de = 0,$$

és ez az adott értékrendszer mellett teljesül. Valóban így

$$a_2 = \frac{a_1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a_1}, \quad a_3 = \frac{a_2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a_2} = \frac{a_1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}a_1}, \quad a_4 = \frac{a_3 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a_3} = a_1,$$

hacsak $1 - \sqrt{3}a_1 \neq 0$ és $1 + \sqrt{3}a_1 \neq 0$, azaz $a_1 \neq \pm 1/\sqrt{3}$. A további $a_3, a_6, a_7, \dots$ tagok gyanánt a_2, a_3 és a_1 ismétlődnek, megint periódikusan, mivel a számsorozat minden tagját az (1) értelmezés szerint csupán a közvetlenül megelőző tagból képezzük.

Képletünk emlékeztet a goniometriából $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ -ra ismert azonosságra. Valóban, írjunk a_1 helyett $\operatorname{tg} \alpha$ -t – ezt bármely megengedett a_1 szám esetén tehetjük, mert a $\operatorname{tg} x$ függvény minden valós értéket felvesz –, továbbá vegyük figyelembe, hogy $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$; így

$$a_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 60^\circ} = \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ).$$

Eszerint megkeresve egy olyan α szöget, amelyre $\operatorname{tg} \alpha = a_1$, a következő tagot az α -nál 60° -kal nagyobb szög tangense is megadja. Ez tovább is fennáll, mert mondtuk már, hogy minden tag képezésében csak a közvetlen megelőző tagot használjuk fel. Így

$$a_3 = \operatorname{tg}[(\alpha + 60^\circ) + 60^\circ] = \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) \quad \text{és} \\ a_4 = \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha,$$

mert a $\operatorname{tg} x$ függvény periódikus és periódusa 180° .

A kizárt $a_1 = 1/\sqrt{3}$ -hoz $\alpha = 30^\circ$, $a_1 = -1/\sqrt{3}$ -hoz pedig $\alpha = -30^\circ$ tartozik, ezekkel $a_2 = \operatorname{tg} 90^\circ$, ill. $a_3 = \operatorname{tg} 90^\circ$ adódnék. Ez nem létezik, ez a tény mutatkozott meg már előre a kizárás szükségességében.

Ezzel megadtuk a kívánt természetű magyarázatot.

Kiss Katalin (Makó, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A 762. gyakorlatban (1)-hez használt $c = f = 1$, $d = -e = 1 = \operatorname{tg} 45^\circ$ értékrendszer mellett hasonló magyarázat adható a sorozat tagjainak négyesével periódikusan való ismétlődésére.

Hasonlóan, ha $c = f = 1$, és $d = -e = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ ahol n természetes szám, akkor az (1) sorozatban $a_{n+1} = a_1$, és általában bármely k természetes számra $a_{n+k} = a_k$. (Itt is vannak a_1 számára kizárt értékek.)

Gyárfás András (Budapest, Toldy F. g. IV. o. t.)

¹ K. M. L. 26 (1963/2) 62. o. (6) egyenlőség.