

I. megoldás. Az összekötő egyenes megszerkesztéséhez célszerű lesz alkalmasan választani a k kört. Mivel e_1 átmege a $(-1; 0)$ ponton, e_2 pedig a $(0; -1)$ ponton, egyszerű számítás várható, ha k -nak az O origó körül egységnyi sugárral rajzolt kört választjuk. Ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Válasszuk továbbá a $(-1; 0)$ pontot B_1 -nek és legyen a $(0; -1)$ pont C_1 . Ilyen választás mellett a további pontok koordinátái is racionális számok lesznek.

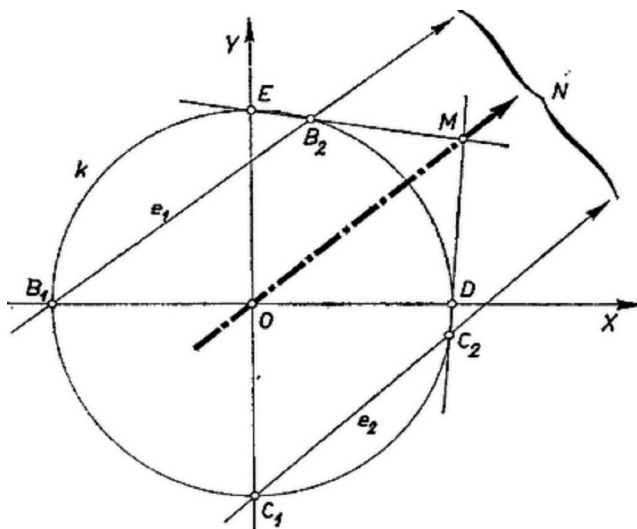
Az e_1 és e_2 egyenesek rajzlapunkról kieső N metszéspontjának koordinátáira az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszert megoldva

$$x_N = 385/27, \quad y_N = 309/27$$

adódik, a keresett ON egyenes egyenlete tehát $y = 309x/385$, és azt kell megmutatnunk, hogy a C_2D és B_2E egyenesek metszéspontja ezen az egyenesen van. Az itt szereplő pontok koordinátái:

$$B_2 : \left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25} \right), \quad C_2 : \left(\frac{55}{48}, \frac{4608}{5329}, -\frac{721}{5329} \right) = \left(\frac{5280}{5329}, -\frac{721}{5329} \right),$$

$$E : (0; 1), \quad D : (1; 0).$$



1. ábra

A C_2D és B_2E egyenesek egyenletei, majd M metszéspontjuk koordinátái:

$$C_2D : y = \frac{721}{49}(x - 1) = \frac{103}{7}(x - 1), \quad B_2E : y - 1 = -\frac{1}{7}x,$$

$$M : \left(\frac{55}{52}, \frac{103 \cdot 3}{7 \cdot 52} \right).$$

M abszcisszáját az ON egyenes egyenletének jobb oldalába helyettesítve

$$\frac{309}{385}x_M = \frac{309}{385} \cdot \frac{55}{52} = \frac{309}{7 \cdot 52} = y_M,$$

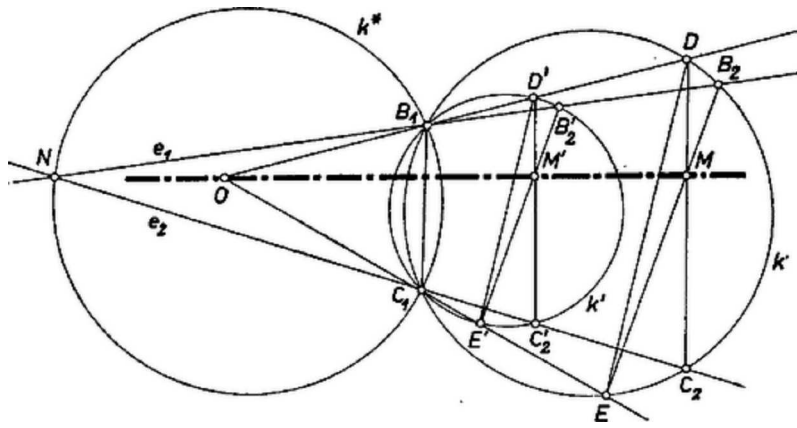
azt kaptuk tehát, hogy M valóban az ON egyenesen van, s így O és M összekötésével a keresett egyenest kapjuk.

Antal Magdolna (Budapest, Varga K. lg. III. o. t.)

Megjegyzés. Az 1-es és 2-es indexű pontok a szerkesztésben különböző szerepet kapnak. Ha tehát pl. C_1 -et felcseréljük C_2 -vel, egy más M_1 -et kapunk. Hasonló számítás mutatja, hogy az így adódó OM_1 egyenes is azonos ON -nel, azonban lehetséges, hogy M_1 is kiesik a rajzlapról.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a leírt szerkesztés a sík bármely e_1, e_2 egyenespárjához és bármely O ponthoz meghatározza az ON egyenest, ahol N az e_1, e_2 egyenesek közös pontja. A bizonyításban a 2. ábrán bemutatott helyzetre szorítkozunk.

Hajtsuk végre a szerkesztést egy k körből kiindulva és a B_1, B_2 , valamint C_1, C_2 pontpárban az indexek egy bizonyos megválasztása mellett, majd vegyünk k helyett egy a B_1, C_1 pontokon átmenő más k' kört, és legyenek az ebből adódó további pontok rendre B'_2, C'_2, D', E', M' . A B_1C_1ED és $B_1C_1E'D'$ húrnégyszögek B_1 -nél, ill. C_1 -nél levő szögei közösek, ezért E -nél és E' -nél, valamint D -nél és D' -nél levő szögek páronként egyenlők, tehát $D'E'$ párhuzamos DE -vel.



2. ábra

Hasonlóan $E'B'_2 \parallel EB_2$ és $D'C'_2 \parallel DC_2$, így a $D'E'M'$ háromszög oldalai rendre párhuzamosak a DEM háromszög megfelelő oldalával, e két háromszög hasonló helyzetű. A hasonlósági középpont O , a DD' és EE' egyenesek metszéspontja, itt megy tehát át az MM' egyenes is, ennél fogva k' helyére bármely más a B_1, C_1 pontokon átmenő kört véve M' mindig az OM egyenesen adódik.

Az OM egyenes átmegy N -en, mert alkalmas kört véve N is kiadódik M' gyanánt: k helyére a B_1, C_1, N pontokon átmenő k^* kört véve B_2^* és C_2^* azonos N -nel, tehát ebben az esetben a $C_2^*D^*$ és $B_2^*E^*$ egyenesek metszéspontja N .

Veres Ferenc (Miskolc, Kilián Gy. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A II. megoldásban (legalábbis a pontoknak az ábrán látható elrendezése mellett) a következő tételt bizonyítottuk: Ha $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ a kör 6 pontja, akkor a „szemben fekvő” A_1A_2 és A_4A_5 , A_2A_3 és A_5A_6 , A_3A_4 és A_6A_1 egyenespárok metszéspontjai egy egyenesen vannak. (Esetünkben a 6 pont B_1, B_2, E, C_1, C_2, D , a metszéspontok N, M és O .) A tétel kör helyén tetszés szerinti kúpszeletre is érvényes, Pascal-tétel néven ismeretes.¹

Hirka András (Pannonhalma, Benedek-rendi g. III. o. t.)

¹Lásd pl. Tankönyvkiadó Vállalat (Budapest) következő Középiskolai Szakköri Füzetekben: Schopp János: Kúpszeletek (1955) 71. o. és Vigassy Lajos: Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással (1957) 32. o.