

I. Jelöljük az a, b, c oldallal szemben fekvő csúcsot A -val, B -vel, ill. C -vel és a belőlük kiinduló súlyvonalat rendre s_a, s_b, s_c -vel.

Két különböző oldalhoz tartozó súlyvonal közül a nagyobbik oldalhoz tartozó a kisebb. Ha ugyanis pl. $a < b$, akkor a C csúcs és vele együtt az s_c súlyvonal is az AB szakasz felező merőlegesének ugyanazon az oldalán van, mint a B csúcs. Ez áll az S súlypontra is, tehát

$$\frac{2}{3}s_a = SA > SB = \frac{2}{3}s_b, \quad s_a > s_b.$$

Így a feltevés szerint $s_a > s_b > s_c$, a súlyvonalak alkotta háromszög tehát csak úgy lehet hasonló az eredetihez, ha

$$(1) \quad a : b : c = s_c : s_b : s_a.$$

Ismeretese¹ az oldalak és súlyvonalak közt a következő összefüggések:

$$(2) \quad 4s_a^2 = -a^2 + 2b^2 + 2c^2, \quad 4s_b^2 = 2a^2 - b^2 + 2c^2, \quad 4s_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Az (1)-ből adódó $b : c = s_b : s_a$ aránypárt négyzetre emelve a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{s_b^2}{s_a^2} = \frac{4s_b^2}{4s_a^2} = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}.$$

A törteket eltávolítva és b hatványai szerint rendezve

$$2b^4 + (3c^2 - a^2)b^2 - 2c^2(c^2 + a^2) = 0.$$

Ez b^2 -re vonatkozóan másodfokú egyenlet, aminek a diszkriminánsa

$$(3c^2 - a^2)^2 + 16c^2(c^2 + a^2) = 25c^4 + 10a^2c^2 + a^4 = (5c^2 + a^2)^2$$

s így – a b^2 -re adódó megoldások közül csak a pozitívot véve –

$$(3) \quad b^2 = \frac{a^2 - 3c^2 + 5c^2 + a^2}{4} = \frac{a^2 + c^2}{2}.$$

Ezzel a gyökkel (2) alapján

$$4s_a^2 = 3c^2, \quad 4s_b^2 = \frac{3}{2}(a^2 + c^2) = 3b^2, \quad 4s_c^2 = 3a^2,$$

tehát ez esetben valóban fennáll (1). Egyszersmind azt is találtuk, hogy a súlyvonalakból képezett háromszög $\sqrt{3}/2$ arányú kicsinyítettje az eredetinek.

Most már (3) alapján $a = 47$ és $b = 65$ -tel $c = 79$, és ezek lehetnek egy háromszög oldalai.

II. A (3)-at és az $a < b < c$ feltételt teljesítő, legkisebb pozitív egész számhármast: $a = 1, b = 5, c = 7$ – ugyanis b helyén 1, 2, 3, 4-gyel $2b^2$ nem bontható fel két különböző természetes szám négyzetének összegére –, ezek azonban nem lehetnek egy háromszög oldalai. További próbálgatással nyerjük elsőnek a 7, 13, 17 számhármast, amelyből már szerkeszthető háromszög.

Hirka András (Pannonhalma, Benedek-rendi g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A súlyvonalakra nyert nagyságviszonyok érvényben maradnak, ha a feltétel helyett $a \leq b \leq c$ -ből indulunk ki. Mindkét nagyságviszonyban egyenlőséget véve (3) teljesül, de közvetlenül is belátjuk, hogy a szabályos háromszög súlyvonalaiából szerkesztett háromszög szabályos, és hogy az oldalak aránya $\sqrt{3}/2$.

2. A (3) egyenlőséget átrendezve

$$c^2 - b^2 = b^2 - a^2, \quad \text{vagy} \quad \frac{c+b}{b+a} = \frac{b-a}{c-b}.$$

Ha a, b, c egész, akkor e törtek értéke racionális szám és 1-nél nagyobb, mert $c > a$, s így $c + b > b + a$. A tört legegyszerűbb alakjában a számlálót és nevezőt u, v -vel jelölve $u > v$ és u, v relatív prímek,

$$(c+b)v = (b+a)u, \quad (b-a)v = (c-b)u.$$

A két egyenletből a -t, ill. c -t kiküszöbölve a maradó két oldal arányára

$$\frac{b}{c} = \frac{u^2 + v^2}{u^2 + 2uv - v^2}, \quad \frac{b}{a} = \frac{u^2 + v^2}{-u^2 + 2uv + v^2}$$

adódik. Így

$$a = 2uv - u^2 + v^2, \quad b = u^2 + v^2, \quad c = 2uv + u^2 - v^2$$

egész megoldása a feladatnak és közös osztó nélküli egészek, ha u és v közül egyik páros, másik páratlan.

Berecz Ágota (Makó, József A. g. III. o. t.)

¹Lásd pl. 752. gyakorlat, K. M. L. 25 (1962/11) 149.o.