

I. megoldás. Helyettesítsük (2)-ből b^2 -et (3)-ba, másrészt (3)-ból c^2 -et (2)-be. Így megkapjuk előbb c^2 és a^2 , másodsor b^2 és a^2 arányát:

$$(4) \quad c^2 = \frac{7}{9} a^2, \quad \text{ill.}$$

$$(5) \quad b^2 = \frac{10}{9} a^2.$$

Ezekkel az oldalak aránya is meg van határozva, vagyis a háromszög alakja, szögei is, hacsak (4) és (5)-nek a még fel nem használt (1)-be való behelyettesítése nem vezet ellentmondásra. (4) és (5)-tel (1) teljesül, eszerint a három egyenlet bármelyike következik a másik kettőből, egyikük megadása felesleges volt.

(4) és (5)-ből $b^2 = 10 k^2$, $a^2 = 9 k^2$, $c^2 = 7 k^2$ – ahol k pozitív arányossági tényező –, így $b > a > c$ és $\beta > \alpha > \gamma$. Másrészt $b^2 = 10 k^2 < a^2 + c^2 = 16 k^2$, így a háromszög hegyesszögű, a szögek tangensei pozitívak és $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \gamma$. Az állítás csak úgy teljesülhet, ha $\operatorname{tg} \alpha$ egyenlő a másik két szög tangensének számtani közepével.

Húzzuk meg az a oldalhoz tartozó m magasságot, és legyen c -nek a -ra való vetülete x . A keletkezett két derékszögű háromszögből

$$\begin{aligned} m^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2, \quad x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = k, \\ m^2 = 6k^2, \quad m = \sqrt{6}k, \quad \operatorname{tg} \beta = \sqrt{6}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{6}, \end{aligned}$$

Ezekkel pedig

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} (\beta + \gamma) = -\frac{\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}}{1 - \frac{6}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4},$$

valóban egyenlő $\operatorname{tg} \beta$ és $\operatorname{tg} \gamma$ összegének felével.

Lukács Lídia (Püspökladány, Karacs F. g. III. o. t.)

II. megoldás. Legyenek egy háromszög oldalai d , e , f , szemben levő szögei δ , ε , φ . Keressük meg, mely feltételnek kell teljesülnie az oldalakra, hogy fennálljon

$$(6) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varphi}{2}.$$

A követelményből az addíció-tétel alkalmazásával

$$\operatorname{tg} \delta = -\operatorname{tg} (\varepsilon + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \varphi - 1} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varphi}{2}.$$

A számlálók egyenlőségéből következik a nevezők egyenlősége is, abból pedig

$$(7) \quad \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \varphi = 3.$$

(Ugyanis a számlálók közös értéke valódi háromszögben nem lehet 0, különben $\operatorname{tg} \varepsilon = -\operatorname{tg} \varphi$ -ből $\varepsilon + \varphi = 180^\circ$ adódnék.)

(7) szerint $\operatorname{tg} \varepsilon$ és $\operatorname{tg} \varphi$ pozitívak – mert nem lehet ε és φ mindegyike tompaszög –, így $\operatorname{tg} \delta$ is pozitív, a háromszög hegyesszögű. Nem állhat $e = f$, mert ez $\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$, $\varepsilon = \varphi = 60^\circ = \delta$ -ra és $d = e = f$ -re vezet, ami (1)–(3) szerint esetünkben lehetetlen. Válasszuk a betűzést úgy, hogy álljon $e > f$. Ekkor $\varepsilon > \varphi$, $\operatorname{tg} \varepsilon > \operatorname{tg} \varphi$, és mivel (6) szerint $\operatorname{tg} \delta$ közékük esik, $\varepsilon > \delta > \varphi$ és $e > d > f$.

Fejezzük ki (7) bal oldalát az oldalakkal és a t területtel:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} = \frac{2df \sin \varepsilon}{d^2 + f^2 - e^2} = \frac{4t}{d^2 + f^2 - e^2}.$$

$\operatorname{tg} \varphi$ hasonló kifejezésével, majd $16t^2$ helyére a Heron-képlet alapján az oldalak kifejezését helyettesítve, beszorzással és rendezéssel

$$\begin{aligned} 16t^2 &= 3(d^2 + f^2 - e^2)(d^2 + e^2 - f^2), \\ 2d^2 e^2 + 2d^2 f^2 + 2e^2 f^2 - d^4 - e^4 - f^4 &= 3d^4 - 3(e^2 - f^2)^2, \\ (8) \quad 2d^4 - (e^2 + f^2)d^2 - (e^2 - f^2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ez a (6) teljesülésének szükséges feltétele; másrészt valódi háromszögben elegendő is, mert számításaink megfordíthatóak.

Vonjuk le (1) $2a^2$ -szereséből (2) b^2 -szeresét és (3) c^2 -szeresét:

$$2a^4 - b^4 - c^4 = a^2b^2 + a^2c^2 - 2b^2c^2,$$

ami átrendezhető

$$2a^4 - a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 = 0$$

alakba. Ez (8)-ból d , e , f helyett a , b , c -t helyettesítve keletkezik, tehát háromszögünknek megvan a (6) tulajdonsága.

Strommer Richárd (Budapest, Piarista g. III. o. t.)
dolgozatából, kiegészítéssel

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy minden a (6) feltételt teljesítő háromszögben a súlypontot a körülírt kör középpontjával összekötő egyenes (a háromszög ún. *Euler*-féle egyenese) párhuzamos a d oldallal. Ugyanis ennek a tulajdonságnak is (7) a feltétele.