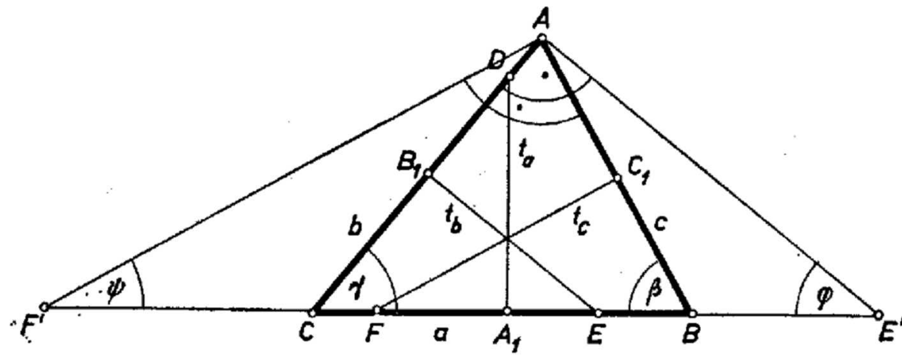
I. megoldás. Jelöljük az a, b, c hosszúságú oldalakkal szemközti csúcsokat A, B, C-vel, az ezeknél fekvő szögeket α, β, γ-val, az oldalak felező pontjait A_1, B_1, C_1-gyel, a t_a, t_b, t_c szakaszok másik végpontját D, E, F-fel. A közelebb van B-hez, mint C-hez (mert $c < b$), ezért BC felező merőlegesének arra az oldalára esik, mint B, tehát a felező merőleges az AC szakaszt metszi, vagyis D az AC oldalon van. Hasonlóan $a = BC > AC = b$ és $a = BC > BA = c$ következtében E és F az a hosszúságú BC oldalon van.



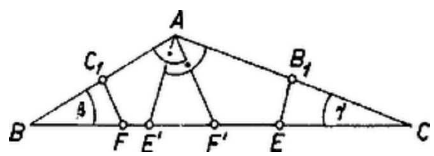
1. ábra

A $t_a = A_1D$ és $t_b = B_1E$ szakaszok az A_1CD és B_1CE derékszögű háromszögek közös γ szögével szemben levő befogók. A két háromszög hasonló, és mivel a γ szög melletti befogókra

$$CA_1 = a/2 > b/2 = CB_1,$$

így a másik befogó párra $t_a > t_b$ áll fenn.

Húzzunk t_b és t_c összehasonlítására A-ból párhuzamost ezekkel, messék a párhuzamosok a BC egyenest az E' ill. F' pontban. Ekkor B_1E az ACE' háromszög középvonala, C_1F az ABF'-é, így $AE' = 2B_1E = 2t_b$, $AF' = 2C_1F = 2t_c$. Megmutatjuk, hogy az $AE'F'$ háromszögben E'-nél nagyobb szög van, mint F'-nél. Ebből már következik, hogy $2t_c = AF' > AE' = 2t_b$, $t_c > t_b$, vagyis a feladat állításában szereplő második egyenlőtlenség.

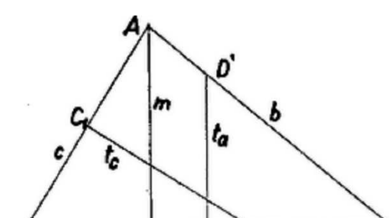


2. ábra

Az ACE' és ABF' derékszögű háromszögekből

$$\varphi = AE'C\sphericalangle = 90^\circ - \gamma, \qquad \psi = AF'B\sphericalangle = 90^\circ - \beta,$$

mivel továbbá $a > b > c$-ből következik, hogy β, γ hegyesszögek és $\beta > \gamma$, így $\varphi > \psi$. A szakaszokra vonatkozó egyenlőtlenség tehát igazolást nyer, ha belátjuk, hogy az $AE'F'$ háromszög E'-nél és F'-nél levő szögei φ és ψ (és egyik esetben sem a $180°$-ra kiegészítő szög). Ehhez meg kell még mutatnunk, hogy E'-től C és F' egy irányban van, F'-től pedig B és E'. Hegyesszögű háromszög esetében ez világos, mert E' a BC oldal B-n túli meghosszabbítására esik, F' pedig az oldal C-n túli meghosszabbítására. Ha BAC tompaszög, akkor AE' ennek a szögtartománynak a belsejében halad, AB-vel hegyesszöget zár be, így az AB-re merőleges AF' a CAE' szögtartomány belsejében halad, tehát a BC egyenessel való F' metszéspontja E' és C közé esik. Ezzel az egyenlőtlenségek bizonyítását befejeztük.



3. ábra

Húzzuk meg a háromszög A-ból induló $AT = m$ magasságát. Mivel a a háromszög legnagyobb oldala, T az oldal belső pontja. A keletkező ACT háromszög hasonló DCA_1-hez, az ABT háromszög pedig FBC_1-hez, mivel a háromszögek derékszögűek és C-nél, ill. B-nél közös szögük van.

Alkalmazva Pythagorász tételét az ABT és ACT háromszögekre

$$c^2 = m^2 + BT^2, \qquad b^2 = m^2 + CT^2,$$

a két egyenlet különbségét képezve

$$b^2-c^2=CT^2-BT^2=(CT+BT)(CT-BT)=a(CT-BT).$$

Az ACT és DCA_1 háromszög hasonlóságából

$$CT=\frac{AT}{A_1D}CA_1=\frac{m}{t_a}\cdot\frac{a}{2},\quad \text{és}\quad CT-BT=2CT-a=\frac{m}{t_a}a-a,$$

így

$$b^2-c^2=a\left(\frac{ma}{t_a}-a\right). \tag{1}$$

Hasonlóan az ABT és FBC_1 háromszögek hasonlóságából

$$BT=\frac{AT}{FC_1}BC_1=\frac{m}{t_c}\cdot\frac{c}{2},\quad \text{és}\quad CT-BT=a-2BT=a-\frac{mc}{t_c},$$

így

$$b^2-c^2=a\left(a-\frac{mc}{t_c}\right). \tag{2}$$

Ha fennáll, $t_a=t_c$, akkor

$$a=CT+TB=\frac{ma}{2t_a}+\frac{mc}{2t_c}=\frac{m}{2t_a}(a+c),$$

és így

$$\frac{m}{t_a}=\frac{2a}{a+c}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve

$$b^2-c^2=a\left(\frac{2a^2}{a+c}-a\right)=\frac{a^2(a-c)}{a+c}, \tag{3}$$

vagy a törtet eltávolítva és 0-ra redukálva

$$a^3-a^2c-a(b^2-c^2)-c(b^2-c^2)=0. \tag{4}$$

Ha van olyan háromszög adott b és c ($b>c>0$) mellett, amelyben két oldal b és c hosszúságú, a harmadik hossza ezeknél nagyobb, és $t_a=t_c$, akkor van olyan a érték b és $b+c$ közt, amelyre (4) teljesül.

Megfordítva: ha teljesül (4) egy b és $b+c$ közti a értékre, akkor egyrészt $a+c>0$, és így teljesül (3) is.

Másrészt minden háromszögre teljesül (1) és (2). Ezek és (3) összehasonlításából egyrészt

$$\frac{ma}{t_a}-a=\frac{2a^2}{a+c}-a,\qquad \frac{m}{t_a}=\frac{2a}{a+c},$$

másrészt

$$a-\frac{mc}{t_c}=\frac{a(a-c)}{a+c},\qquad \frac{m}{t_c}=\frac{1}{c}\left[a-\frac{a(a-c)}{a+c}\right]=\frac{2a}{a+c},$$

tehát $t_a=t_c$.

Azt kell tehát belátnunk, hogy az

$$f(x)=x^3-x^2c-x(b^2-c^2)-c(b^2-c^2)$$

polinomnak van b és $b+c$ közé eső gyöke.

Írjunk az egyenlet bal oldalán x helyére előbb b-t, majd $b+c$-t:

$$f(b)=-2b^2c+bc^2+c^3=-c(b-c)(2b+c)<0,$$
$$f(b+c)=2c^2(b+c)>0,$$

ellentett előjelűek. Ezek szerint adott pozitív b, c értékek és $b>c$ esetén van olyan a szám, amelyre

$$b<a<b+c,$$

másrészt $f(a)=0$. Így az a, b, c oldalak háromszöget adnak, és abban $t_a=t_b$, mert a végzett számítás visszafordítható.

Az egyenlőtlenségek bizonyítása *Dobó Ferenc* (Budapest, I. István g. IV. o. t.) dolgozatából.

II. megoldás. A szögek fenti jelöléseivel a megfelelő derékszögű háromszögekből

$$t_a = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\gamma, \qquad t_b = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\gamma, \qquad t_c = \frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta. \tag{5}$$

Így az $a/2 > b/2$ egyenlőtlenséget a pozitív $\operatorname{tg}\gamma$-val szorozva $t_a > t_b$.

Másrészt $\gamma < \beta < 90^\circ$ miatt $\cos\gamma > \cos\beta > 0$, és

$$0 < \frac{1}{\cos\gamma} < \frac{1}{\cos\beta}.$$

Ezt a színusz tételből adódó, pozitív tagokból álló

$$\frac{b\sin\gamma}{2} = \frac{c\sin\beta}{2}$$

egyenlőséggel szorozva $t_b < t_c$ adódik.

A $t_a = t_c$ követelményből a szögfüggvényeket az oldalakkal kifejezve egyenletet kapunk a-ra.

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{2ab\,\sin\gamma}{a^2+b^2-c^2} = \frac{4t}{a^2+b^2-c^2} \quad \text{és}$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4t}{a^2+c^2-b^2},$$

ezért behelyettesítéssel és a szokásos rendezési lépésekkel:

$$\frac{a}{a^2+b^2-c^2} = \frac{c}{a^2+c^2-b^2},$$
$$a^3 - ca^2 - (b^2-c^2)a - (b^2-c^2)c = 0.$$

(A nevezők egyike sem 0, mert csak a b és c-nél nagyobb a értékekre szorítkozunk.) Ezzel ismét az I. megoldás (4) egyenletére jutottunk.

Az egyenlőtlenségek bizonyítása *Csirik János* (Orosháza, Táncsics M. g. III. o. t.) dolgozatából.

Megjegyzés. A dolgozatok a $t_a = t_c$ követelményből az (5) kifejezésekkel és a színusz–tétel alkalmazásával levezették az

$$a = b\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \tag{6}$$

összefüggést, és ebből következtettek egy a b-nél nagyobb a létezésére, a $\cos\gamma > \cos\beta (> 0)$ egyenlőtlenség felhasználásával. Ez nem helyes, mert burkoltan felhasználták a bizonyítandó állítást. γ-ról és β-ról csak akkor beszélhetünk, ha már tudjuk, hogy létezik olyan a, amely b-vel és c-vel együtt háromszöget alkot és abban $t_a = t_c$. Még világosabban: b, β és $\gamma (< \beta)$ megadásával a háromszög már meg van határozva, és nem biztos, hogy teljesül (6).