

Az x -et és a p -t tartalmazó tagokat egyelőre egy zárójelbe foglalva az egyenlet így írható:

$$\frac{2(x-p)+q}{2(x-p)-q} = \frac{2q+(x+p)}{2q-(x+p)}.$$

Ezt a két nevező szorzatával szorozva – feltéve természetesen, hogy a szorzat nem 0 – két-két tag kiesik:

$$2q^2 - 2(x^2 - p^2) = -2q^2 + 2(x^2 - p^2), \quad x^2 = p^2 + q^2.$$

A szorzással gyököt nem veszthettünk el, ennél fogva az egyenletet csak az

$$(2) \quad x_1 = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad x_2 = -\sqrt{p^2 + q^2}$$

számok elégíthetik ki, vagy pedig az egyenletnek nincs megoldása.

A feladat követelménye csak a következő két módon teljesülhet:

I. x_1 és x_2 nem különböznek: $x_1 = x_2 = 0$, és ez kielégíti az egyenletet. Azonban a (2) kifejezések csak a $p = q = 0$ értékpárral válhatnak 0-vá (csak valós p, q számokat veszünk figyelembe), viszont $x = p = q = 0$ -val az adott egyenlet mindkét oldala értelmetlen. Ez a mód nem vezet célba.

II. x_1 és x_2 egyike megoldás, másika nem, mert mellette az egyenletnek nincs értelme.

a) A bal oldali tört értelmetlenné válik, ha

$$x^* = p + \frac{q}{2},$$

keressünk tehát olyan p, q értékpárt, amelyre x_1 és x_2 egyike egyenlő x^* -gal:

$$\pm \sqrt{p^2 + q^2} = p + \frac{q}{2}.$$

Innen a szokásos lépésekkel

$$q^2 = pq + \frac{q^2}{4}, \quad q \left(p - \frac{3q}{4} \right) = 0, \quad \text{tehát}$$

$a_1)$ aleset: vagy $q = 0$, és p bármely szám – kivéve az I-ben már kizárt $p = 0$ értéket –,

$a_2)$ aleset: vagy $p = 3q/4$, továbbá ismét $q \neq 0$.

Az $a_1)$ alesetben (2) így alakul: $x_1 = p$ – ez éppen a kizárt x^* érték –, másrészt $x_2 = -p$, ennek kellene lennie az egyetlen gyöknek. Azonban $x_2 = -p$ -vel (1) jobb oldala értelmetlen, itt tehát nem kapunk megfelelő p, q számpárt.

Az $a_2)$ alesetben $x^2 = 25q^2/16$, viszont a kizárt érték $x^* = 5q/4$, ennél fogva az egyetlen megoldás csak a következő érték lehet:

$$(3) \quad x = -\frac{5q}{4}.$$

Ezzel (1) bal és jobb oldala

$$\frac{-\frac{5q}{2} - \frac{3q}{2} + q}{-\frac{5q}{2} - \frac{3q}{2} - q} = \frac{3}{5}, \quad \text{ill.} \quad \frac{2q + \frac{3q}{4} - \frac{5q}{4}}{2q - \frac{3q}{4} + \frac{5q}{4}} = \frac{3}{5},$$

tehát (3) valóban megoldás.

b) Hasonlóan (1) jobb oldala értelmetlenné válik, ha

$$x^{**} = 2q - p.$$

Az $x_{1,2} = x^{**}$ követelés $q(3q - 4p) = 0$ -ra vezet, vagyis az $a)$ eset feltételeire, így nem kapunk új megfelelő p, q számpárt.

Ezek szerint a feladat követelménye azokra és csak azokra a p, q értékpárookra teljesül, amelyekre $p : q = 3 : 4$ és $q \neq 0$. Ezen értékpárookra az egyenlet egyetlen megoldása $x = -5q/4$, másképpen $x = -5p/3$.

Lehel Jenő (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)