Fejezzük ki (1) és (2)-ből x-et és y-t a, b, c, és z-vel. Az x-re és y-ra így adódó kifejezéseket (3)-ba helyettesítve a keletkező egyenletet megoldjuk z-re. (1)-et b-vel, (2)-t $(a-b)$-vel szorozva, kivonással y kiesik:

$$(4)\qquad \begin{gathered}[ab+(a-b)^2]x = b[a^2+(b-c)^2]+(b-a)[b^2+(c-a)^2]+\\ +(2bc-ac-b^2)z;\end{gathered}$$

(1)-et $(a-b)$-vel, (2)-t a-val szorozva és összeadva x kiesik:

$$(5)\qquad \begin{gathered}[(a-b)^2+ab]y = (a-b)[a^2+(b-c)^2]+a[b^2+(c-a)^2]+\\ +(2ac-a^2-bc)z.\end{gathered}$$

Szorozzuk mostmár (3)-at $[ab+(a-b)^2] = (a^2-ab+b^2)$-nel és a bal oldal első két szorzatába írjuk be (4) és (5) jobb oldalát. Az így adódó, z-re elsőfokú egyenlet rendezése és összevonás után z együtthatója a bal oldalon

$$(6)\qquad \begin{gathered}E = (c-a)(2bc-ac-b^2)+(c-b)(2ac-a^2-bc)+\\ +c[ab+(a-b)^2] = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-5abc.\end{gathered}$$

A z-t nem tartalmazó tagokat a jobb oldalra gyűjtjük. Vegyük észre, hogy (1)–(3) jobb oldalai kifejtés után, $a^2+b^2+c^2=S$ jelöléssel így írhatók

$$S-2bc,\qquad S-2ac,\qquad S-2ab.$$

Válasszuk külön ezért a jobb oldalnak S-et tartalmazó tagjait. S szorzója:

$$\begin{gathered}[ab+(a-b)^2]-(c-a)[b+(b-a)]-(c-b)[(a-b)+a] =\\ = 3ab-ac-bc.\end{gathered}$$

A többi tagokból álló polinomot rendezzük c csökkenő hatványai szerint:

$$\begin{gathered}T = -2ab[ab+(a-b)^2]+2bc[b(c-a)+(a-b)(c-b)]+\\ +2ac[(b-a)(c-a)+a(c-b)] =\\ = 4abc^2+(2a^3-4a^2b-4ab^2+2b^3)c-2ab(a^2-ab+b^2).\end{gathered}$$

Ezek szerint az egész jobb oldal, c szerint rendezve

$$\begin{gathered}J = S(3ab-ac-bc)+T = -(a+b)c^3+7abc^2+\\ +(a^3-5a^2b-5ab^2+b^3)c+ab(a^2+2ab+b^2).\end{gathered}$$

Így az $Ez=J$ egyenletből $z=J/E$. A két polinom osztása céljára E-t is c hatványai szerint rendezzük:

$$\begin{gathered}E = (a+b)c^2+(a^2-5ab+b^2)c+ab(a+b),\qquad \text{így}\\ z = -c+a+b.\end{gathered}$$

Ezt a kifejezést (4)-be és (5)-be helyettesítve x-re, ill. y-ra kapunk elsőfokú egyenletet. (4) jobb oldalát célszerű a hatványai szerint rendezni:

$$\begin{gathered}[b+(b-a)]S-2b^2c-2ac(b-a)+(2bc-ac-b^2)(a+b-c) =\\ = -a^3+(2b+c)a^2-(2b^2+bc)a+(b^3+b^2c).\end{gathered}$$

Ezt az $ab+(a-b)^2 = a^2-ab+b^2$ együtthatóval osztva

$$x = -a+b+c,$$

és hasonlóan

$$y = -b+a+c.$$

Ezek szerint, ha egyik kifejezés sem tűnik el, amivel osztottunk, akkor az egyenletrendszer megoldása csak a következő lehet:

$$(7)\qquad x = b+c-a,\qquad y = c+a-b,\qquad z = a+b-c.$$

A behelyettesítés mutatja, hogy e kifejezések a rendszert minden esetben kielégítik.

Megadunk az a, b, c értékhármasokra egy elegendő feltételt, melynek teljesülése esetén (7) az adott rendszernek egyetlen megoldása.

Az x és y meghatározásánál fellépő osztó:

$$a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

pozitív, kivéve ha $b = 0$ és $a = b/2 = 0$. Utóbbi esetben az egyenletrendszer határozatlanná válik. (Belőle $z = -c$, $x + y = c$ adódik, ha $c \neq 0$, ha pedig c is 0, akkor három $0 = 0$ egyenlet, amely nem tartalmazza az ismeretleneket, és így minden x, y, z értékhármas mellett teljesül.) Hasonló a helyzet, ha a, b, c közül bármelyik másik kettő lesz 0. Ha viszont a három paraméter közül legfeljebb egyik 0, akkor x és y egyértelműen van meghatározva, feltéve, hogy z egyértelmű, ami viszont fennáll, ha a (6) alatti E kifejezés nem 0.

Anélkül, hogy megkeresnénk az összes olyan a, b, c számhármast, amelyre $E \neq 0$, megmutatjuk, hogy ez mindig teljesül, ha a, b, c nem negatívok és legfeljebb egyikük 0. Valóban

$$\begin{gathered}
E = a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 - 5abc = \\
= a^2c - 2abc + b^2c + ab^2 - 2abc + ac^2 + a^2b - 2abc + bc^2 + abc = \\
= (a-b)^2c + (b-c)^2a + (c-a)^2b + abc,
\end{gathered}$$

itt egyik tag som negatív, ha a, b, c nem negatív, és ha mindhárom szám pozitív, akkor a kifejezés utolsó tagja pozitív, ha pedig pl. $c = 0$, de $a \neq 0$, $b \neq 0$, akkor a második és harmadik tag pozitív.

Csirik János (Orosháza, Táncsics M. g. III. o. t.)
dolgozatából, kiegészítéssel