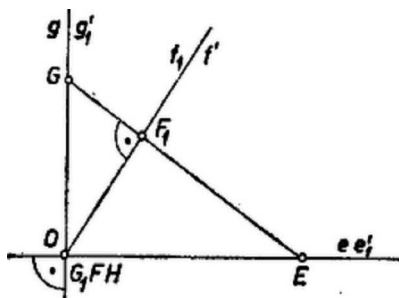


Megmutatjuk, hogy FG merőleges az e, e_1 egyenesek η síkjára; ebből már következik, hogy a kérdésre „igen” a válasz, mert így FG merőleges az η sík minden egyenesére. Messe az EG egyenes f_1 -et F_1 -ben, EF a g_1 -et G_1 -ben. Azt állítjuk, hogy a g, g_1 egyenesek γ síkja merőleges EF -re. OG_1 és EF szerkesztés szerint merőlegesek, elég tehát belátnunk, hogy γ tartalmaz egy az EF -re merőleges, egyszersmind az OG_1 -gyel nem párhuzamos egyenest is. Ilyen a G_1 -ben az e, f síkra állított g_2 merőleges, mert e, f tartalmazza EF -et, másrészt g_2 merőleges g_1 -re, végül g_2 -n átmegegy minden a G_1 -et tartalmazó és e, f -re merőleges sík, tehát γ is. Így valóban γ merőleges EF -re. Hasonlóan az $f, f_1 = \varphi$ sík merőleges EG -re.

Ezek szerint az $OHE = OE_1E = \eta^*$ sík és a benne fekvő $OE = e$ egyenes is merőleges FG -re. Ebből egyrészt $OE_1 \perp FG$ következik, másrészt az, hogy η^* merőleges az $FOG = f, g$ síkra, ugyanis ez átmegy FG -n, és két sík akkor merőleges egymásra, ha egyikük tartalmaz egy a másikra merőleges egyenest. Azonban feltevésünk szerint az $OE = e$ egyenes nem merőleges az f, g síkra, ezért rajta csak egy az f, g -re merőleges sík fektethető. Így η^* azonos az e vetítéséhez használt η síkkal, és η -nak az f, g -vel való OE_1 metszésvonala azonos e -nek e_1 vetületével; tehát $e_1 \perp FG$. Ezt akartuk bizonyítani.



3. ábra

Ha e merőleges az f és g egyikére, pl. g -re (f -re azonban nem, 2. ábra, a térbeli helyzetnek az e, g síkon levő vetülete a 3. ábra), akkor g_1 is merőleges e -re (g_1 -nek az e, g síkon levő vetülete azonos g -vel), ezért F az O -ba esik, így $FG = g$, ami merőleges e_1 -re. Érvényesek azonban előző megfontolásaink is, ugyanis G_1 is O -ban adódik, továbbá H is. f_1 viszont nem azonos g -vel, ezért G az O -tól különbözőnek adódik. Így E, F, G nem egy egyenesbe eső pontok, az EFG sík létezik és azonos e, g -vel. Ebben a helyzetben az OH egyenes határozatlannak látszik. Emlékezzünk azonban, hogy fent az OH egyenes nem O és H összekötésével jött létre, hanem mint a φ és γ síkok metszésvonala, ez pedig most is létezik: az O -ban e, g -re állított merőleges (ugyanis γ is, φ is merőleges e, g -re).

A már előre kizárt eseteken túl akkor sincs értelme a kérdésnek, ha az FG egyenes nem jön létre. F csak akkor nem jön létre, ha g_1 merőleges f -re, mert így az e, f síkban az (O -tól különböző) E -ből g_1 -re állított merőleges párhuzamos f -fel. Ez azt jelenti, hogy g is merőleges f -re, tehát másrészt G sem jön létre. – Ha F és G létrejött, akkor H is létezik.

Mindezeket összefoglalva a feltett kérdésre válaszunk: ha f és g nem merőlegesek és egyik egyenes sem merőleges a másik kettő síkjára, akkor az FG egyenes létrejön és merőleges e_1 -re; a kizárt esetekben a kérdésnek nincs értelme.

Makai Endre (Budapest, Eötvös J. g. II. o. t.)

Megjegyzés. A legtöbb dolgozatban fel sem merül, hogy léteznek-e mindig a szóban forgó egyenesek.