

I. megoldás. Legyen az $y = ax^2$ parabola ($a \neq 0$) négy különböző pontja $A(x_1, ax_1^2)$, $B(x_2, ax_2^2)$, $C(x_3, ax_3^2)$, $D(x_4, ax_4^2)$. Itt x_1, x_2, x_3, x_4 különbözők, mert pl. $x_1 = x_2$ -ből A és B azonossága következne, a feltevessel ellentétben. Tegyük fel, hogy A, B, C, D egy paralelogramma csúcsai, azaz $AB \parallel CD$, és $AD \parallel BC$. Eszerint az összekötő egyenesek irányítányezőinek megegyezéséből:

$$(1) \quad \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{ax_4^2 - ax_3^2}{x_4 - x_3} \quad \text{és} \quad \frac{ax_4^2 - ax_1^2}{x_4 - x_1} = \frac{ax_3^2 - ax_2^2}{x_3 - x_2}$$

(Itt mindegyik tört nevezője 0-tól különböző.) Az (1) egyenlőségek kiemeléssel, szorzattá alakítással és egyszerűsítéssel így alakulnak:

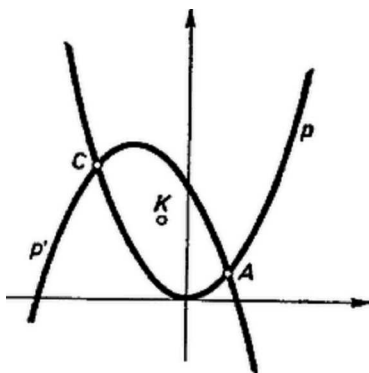
$$\frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) = a(x_4 + x_3),$$

tehát

$$x_2 + x_1 = x_4 + x_3, \quad \text{és ugyanígy} \quad x_4 + x_1 = x_3 + x_2,$$

ezekből pedig a megfelelő oldalak összeadásával és rendezéssel $x_1 = x_3$ adódik, feltevésünkkel ellentétben. Ezért az (1) egyenlőségek egyidejűen nem állhatnak fenn, A, B, C, D nem alkothat paralelogrammát.

Mészáros György (Budapest, Piarista g. III. o. t.)



1. ábra

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a p parabolába beírt $ABCD$ négyszög paralelogramma, és tükrözzük ábránkat a négyszög K középpontjára. Ekkor A, B, C, D rendre C, D, A, B -be megy át, p pedig egy p' parabolába. Így a p és p' paraboláknak legalább 4 különböző közös pontjuk van; másrészt tengelyeik párhuzamosak, mert a tükrözés p tengelyét egy vele párhuzamos egyenesbe viszi át. Ha p egyenlete $y = ax^2$, a K pont koordinátái (α, β) , akkor p' csúcsa $(2\alpha, 2\beta)$, tengelye az $x = 2\alpha$ egyenes, és egyenlete $y - 2\beta = -a(x - 2\alpha)^2$.

Mármost p és p' közös pontjait keresve ezek abszcisszáit az egyenleteikből y kiküszöbölésével adódó

$$ax^2 = -a(x - 2\alpha)^2 + 2\beta$$

egyenletből kapjuk. Ez másodfokú, tehát p -nek és p' -nek legfeljebb két abszcisszán lehet közös pontja. Másrészt p és p' egyenlete szerint minden x -hez csak egy y érték tartozik, így p és p' közös pontjainak a száma legfeljebb 2.

Ellentmondásra jutottunk fenti megállapításunkkal, tehát feltevésünk hibás, a parabolába nem írható paralelogramma.

Kászonyi László (Szombathely, Nagy Lajos g. IV. o. t.)

III. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy véve egy parabolának egy adott iránnyal párhuzamos húrjait, ezek felezőpontjai egy a parabola tengelyével párhuzamos egyenesen vannak rajta. Más szóval: ha egy a p parabolába beírt $ABCD$ négyszög AB és CD oldalai párhuzamosak, akkor ezen oldalak felezőpontját G , ill. H -val jelölve a GH egyenes párhuzamos p -nek a tengelyével.

Ebből már következik a bizonyítandó állítás. Ha ugyanis $ABCD$ paralelogramma volna, akkor az AB és CD oldalak felezőpontjait összekötő szakasz is, a BC és DA oldalak felezőpontjait összekötő szakasz is párhuzamos volna a tengellyel, holott ez a két szakasz metszi egymást a paralelogramma középpontjában.

