I. megoldás. Legyen a három oldal mértékszámra rendre $a = b - 1$, b, $c = b + 1$ (ahol nyilván $b > 2$). Így a háromszög kerülete $2s = 3b$, területe

$$t = \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{b}{2}+1\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}+1\right)} = \frac{b}{4}\sqrt{3(b^2-4)},$$

ennélfogva ismert összefüggések alapján a beírt és a körülírt kör sugara:

$$\varrho = \frac{t}{s} = \frac{\sqrt{3(b^2-4)}}{6}, \qquad r = \frac{abc}{4t} = \frac{b^2-1}{\sqrt{3(b^2-4)}}. \tag{1}$$

Ezekkel a vizsgálandó összefüggés jobb oldala

$$2\varrho + \frac{1}{2\varrho} = \frac{4\varrho^2+1}{2\varrho} = \frac{\dfrac{3(b^2-4)}{9}+1}{\dfrac{\sqrt{3(b^2-4)}}{3}} = \frac{b^2-1}{\sqrt{3\,(b^2-4)}},$$

egyenlő r kifejezésével. Tehát az állítás igaz.

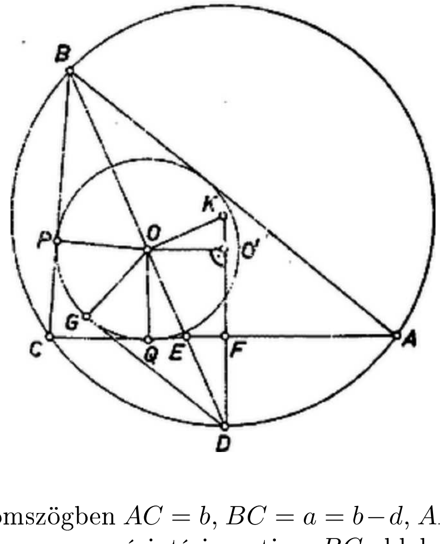
A bizonyításban nem használtuk fel, hogy az oldalak mértékszámai egészek, ezért az összefüggés minden olyan háromszögben fennáll, melyben a legkisebb oldal 1-gyel kisebb, a legnagyobb oldal pedig 1-gyel nagyobb, mint a (nagyságra nézve) középső oldal.

Lepsényi Edit (Budapest, Berzsenyi D. lg. IV. o. t.)

Megjegyzés. Hasonló számítás mutatja, hogy ha az oldalak hossza $b - d$, b és $b + d$, akkor

$$r = 2\varrho + \frac{d^2}{2\varrho}.$$

Ezt más úton mutatjuk meg. Ennek során kissé több számolással a vizsgált háromszögekben további érdekes összefüggéseket is fogunk találni.



II. megoldás. Legyen az ABC háromszögben $AC = b$, $BC = a = b-d$, $AB = c = b+d$, a körülírt kör középpontja K, sugara r, a beírt, kör középpontja O, sugara ϱ, érintési pontja a BC oldalon P, AC-n Q. Ismert összefüggés szerint

$$AQ = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b}{2} + d,$$

ha tehát AC felezőpontja F, akkor $FQ = AQ - AF = d$. Messe a CBA szög BO felezője az AC oldalt E-ben, a B-t nem tartalmazó AC ívet, D-ben. $BC < BA$ miatt E a CF szakaszon, szűkebben a QF szakaszon van. Megmutatjuk, hogy E felezi a QF szakaszt. A szögfelező osztásarányára ismert tétel szerint

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{CF-EF}{AF+EF}, \quad \text{tehát} \quad \frac{b-d}{b+d} = \frac{\dfrac{b}{2}-EF}{\dfrac{b}{2}+EF} = \frac{b-2EF}{b+2EF},$$

és innen valóban $2EF = d = QF$.

D felezi a mondott AC ívet, ezért DF merőleges AC-re és átmegy K-n. Így a DEF és OEQ derékszögű háromszögek egybevágók, mert egy-egy oldaluk és a rajta fekvő szögeik egyenlők, tehát $FD=QO=\varrho$ és $OE=DE$. Ezért, O-nak KD-n levő vetületét O'-vel jelölve $DO'=DF+FO'=2QO=2\varrho$, másrészt $OO'=QF=d$, és igy az ODO' derékszögű háromszögből

$$OD^2=DO'^2+O'O^2=4\varrho^2+d^2.$$

Érintse a beírt kört a D-ből húzott érintő G-ben, akkor az I. megoldás (1) összefüggéséhez hasonlóan adódó $12\varrho^2=b^2-4d^2$ egyenlőség felhasználásával

$$DG^2=OD^2-\varrho^2=3\varrho^2+d^2=\frac{b^2}{4},\quad DG=\frac{b}{2}.$$

Így a DOG háromszög egybevágó a BOP háromszöggel, mert az utóbbiban $BP=(a+c-b)/2=b/2$, ennélfogva $BO=DO$. Eszerint O felezi a körülírt kör BD húrját, és a DKO háromszög O-nál derékszögű. Ebből az ismert mértani középarányos tétel alapján

$$DO'\cdot O'K=OO'^2,\quad 2\varrho(r-2\varrho)=d^2,$$

ami a bizonyítandó összefüggésnek átrendezett alakja. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Szilágyi Tivadar (Budapest, II. Rákóczi F. g. III. o. t.)