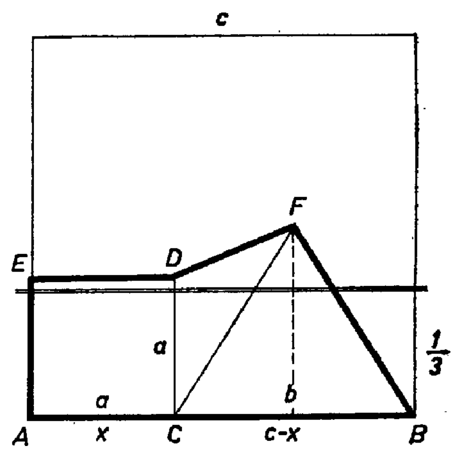
I. megoldás. Legyen $AC = a$, $CB = b$. Ekkor $AB = a + b$, a CDF háromszög $CD = a$-ra merőleges magassága $b/2$. Ekkor – az idomok területét ugyanúgy jelölve, mint magukat az idomokat – a következő egyenlőtlenség fennállását kell bizonyítanunk:

$$ABFDE = ACDE + CDF + CBF = a^2 + \frac{ab}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} > \frac{(a+b)^2}{3},$$

más szóval, hogy a bal és jobb oldal különbsége pozitív:

$$\frac{2a^2}{3} - \frac{5ab}{12} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{3}\right) b^2 > 0.$$



Az első két tagból teljes négyzetté kiegészítéssel

$$\frac{2a^2}{3} - \frac{5ab}{12} = \frac{2}{3}\left(a^2 - \frac{5}{8}ab\right) = \frac{2}{3}\left(a - \frac{5}{16}b\right)^2 - \frac{25}{384}b^2,$$

tehát a különbség

$$\frac{2}{3}\left(a - \frac{5}{16}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{51}{128}\right) b^2.$$

Itt b^2 együtthatója pozitív, mert

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{32\sqrt{3}}{128} = \frac{\sqrt{3072}}{128} > \frac{55}{128} > \frac{51}{128},$$

s így a kifejezés valóban mindig pozitív. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Márki László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás. Legyen $AB = c$, $AC = x$, így $CB = c - x$ és az I. megoldás szerint az ötszög területe:

$$y = x^2 + \frac{x(c-x)}{4} + \frac{(c-x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{2\sqrt{3}-1}{4}cx + \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Keressük meg y legkisebb értékét, azzal a korlátozással, hogy x csak 0-tól c-ig változik. Ha ezt $c^2/3$-nál nagyobbnak találjuk, akkor a feladat állítása igaz.

Egyszerűbb számolás érdekében jelöljük x^2, cx, c^2 együtthatóját átmenetileg rendre p, q, r-rel, így $y = px^2 + qcx + rc^2$. Kiemeléssel és teljes négyzetté kiegészítéssel

$$y = p\left(x^2 + \frac{q}{p}cx + \frac{r}{p}c^2\right) = p\left[\left(x + \frac{qc}{2p}\right)^2 - \frac{q^2c^2}{4p^2} + \frac{r}{p}c^2\right] =$$

$$= p\left(x + \frac{qc}{2p}\right)^2 + \frac{4pr - q^2}{4p}c^2,$$

illetőleg az együtthatókkal a számításokat elvégezve

$$y = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{7\sqrt{3}-9}{12}c\right)^2 + \frac{49\sqrt{3}-51}{96}c^2.$$

y legkisebb értéke akkor adódik, ha a változót egyedül tartalmazó első tag értéke 0. Ez beáll, ha

$$x=\frac{7\sqrt{3}-9}{12}\,c \quad (\approx 0{,}26\ c),$$

ami az x számára megengedett érték. Ekkor y egyenlő a második taggal:

$$y_{\min}=\frac{49\sqrt{3}-51}{96}c^2=\frac{\sqrt{7203}-51}{96}c^2>\frac{84-51}{96}c^2=\frac{33}{96}c^2>\frac{1}{3}c^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Csirik János (Orosháza, Táncsics M. g. III. o. t.)